

GIOCO 6 MATEMATE LUGLIO

Exercise. Si provi che $\forall N \geq 1$ la somma

$$\sum_{1 \leq k \leq N} \sqrt{k}$$

appartiene all'intervallo

$$\left(\frac{2N}{3} \sqrt{N}, \frac{4N+3}{6} \sqrt{N} \right)$$

Proof. Per sommazione parziale si ha

$$\sum_{1 \leq k \leq N} \sqrt{k} = N\sqrt{N} - \frac{1}{2} \int_1^N \frac{\lfloor t \rfloor}{\sqrt{t}} dt = N\sqrt{N} - \frac{1}{2} \int_1^N \sqrt{t} dt + \frac{1}{2} \int_1^N \frac{\{t\}}{\sqrt{t}} dt \quad (1)$$

indicando con $\lfloor t \rfloor$ la parte intera di t e con $\{t\}$ la parte frazionaria di t . Da ciò

$$(1) < N\sqrt{N} - \frac{1}{3} \sqrt{N^3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \int_1^N \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq \sqrt{N} \left(\frac{4N+3}{6} \right)$$

e

$$(1) > N\sqrt{N} - \frac{1}{3} \sqrt{N^3} = \frac{2N}{3} \sqrt{N}.$$

□