MATEMATE SETTEMBRE GIOCO 2

Exercise. Si provi che se $k \geq 2$ divide F_n, allora $\forall d \geq 1$ si ha
$$k^d \mid F_{k^{d-1}n}.$$

Proof. Per induzione su d. Per $d = 1$ è l'ipotesi. Sia vero per d. Sappiamo che vale la formua
$$F_{rs} = \sum_{i=1}^{r} \binom{r}{i} F_i F_s^i F_{s-1}^{r-i}$$
da cui osserviamo
$$F_{k^d n} = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} F_i F_{k^{d-1}n}^i F_{k^{d-1}n-1}^{k-i} = kF_1 F_{k^{d-1}n} F_{k^{d-1}n-1}^{k-1} + \sum_{i=2}^{k} \binom{k}{i} F_i F_{k^{d-1}n}^i F_{k^{d-1}n-1}^{k-i} =$$
$$= D_1 + D_2.$$
per ipotesi induttiva si ha che $k^d \mid F_{k^{d-1}n}$ e quindi $k^{d+1} \mid D_1$, e siccome $k^{d+1} \mid F_{k^{d-1}n}^i$ con $i \geq 2$, direi che siamo a posto. □