MateMate - Luglio

Andrea Marino alias Gottinger

19 luglio 2014

1 Problema 5

Vogliamo dimostrare che, per ogni $x > 1$, vale:

$$\frac{1}{x-1}\left(1-\frac{1}{x^n}\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi(k)}{k} \log\left(\frac{1}{1-x^{-k}}\right) < \frac{1}{x-1}$$

che è la richiesta del problema se si sostituisce $x = 2$. Iniziamo con due lemmi.

Lemma 1. *Per ogni* $0 < x < 1$ *vale*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \log\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

Dimostrazione. Sia

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

una serie formale di potenze. La sua derivata formale è

$$F'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Dunque, integrando, abbiamo:

$$F(x) = -\int \frac{-1}{1-x} = -\log(1-x) = \log\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

Per $0 < x < 1$ abbiamo che $F(x) < F'(x)$ converge, perciò i passaggi sono validi anche analiticamente. □

Lemma 2. *Per ogni* $n \geq 1$ *vale*

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

Dimostrazione. Consideriamo $\dfrac{\varphi(n)}{n}$. Come è noto, vale:

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Ancora, in stile prodotto di Eulero, si ha

$$\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}$$

Da cui, unendo le due equazioni:

$$\varphi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\frac{n}{d}$$

Per l'inversione di Moebius, otteniamo

$$n=\sum_{d|n}\varphi(d)$$

$\square$

Step 1.1. *Manipolazioni algebriche.*

Abbiamo, usando il lemma 1 per $0<x^{-k}<1$:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(k)}{k}\log\left(\frac{1}{1-x^{-k}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(k)}{k}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j\cdot x^{kj}}$$

Che per double counting diventa:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{kj\cdot x^{kj}}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\cdot x^m}\sum_{k|m,\ k\le n}\varphi(k)$$

Notiamo che la somma esterna è infinita, mentre quella interna è limitata. Giacchè tutti i termini sono positivi, possiamo ottenere il lower bound limitando la somma esterna, e l'upper bound liberandoci della limitazione nella somma interna.

Step 1.2. *Upper bound per S_n.*

Dimostrazione. Abbiamo, per il lemma 2:

$$S_n=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\cdot x^m}\sum_{k|m,\ k\le n}\varphi(k)<\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\cdot x^m}\sum_{k|m}\varphi(k)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{x^m}=\frac{1}{x}\frac{1}{1-x^{-1}}=\frac{1}{x-1}$$

$\square$

Step 1.3. *Lower bound per S_n.*

Dimostrazione. Abbiamo, sempre per il lemma 2:

$$S_n=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\cdot x^m}\sum_{k|m,\ k\le n}\varphi(k)>\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m\cdot x^m}\sum_{k|m}\varphi(k)=\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{x^m}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1-x^{-n}}{1-x^{-1}}=\frac{1}{x-1}\left(1-\frac{1}{x^n}\right)$$

$\square$

Tanto perchè ci abbiam preso gusto, esponiamo una piccola generalizzazione.

Generalizzazione. *Sia $J_k(n)$ il k-esimo numero di Jordan di n, definito come*

$$J_k(n) = n^k \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^k}\right)$$

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ una successione tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L < \infty$$

Allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_k(n)}{n^k} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{nj}}{j^k} = L$$

La dimostrazione è identica, e usa il fatto che

$$\sum_{d|n} J_k(d) = n^k$$

che si dimostra nello stesso modo in cui si dimostra per $k = 1$, cioè quando $J_1(n) \equiv \varphi(n)$.