Kirill Kuzmin, lezione del 16 novembre 2012

Presento qui la risoluzione di un esercizio lasciato alla lezione del 16 novembre 2012.

Cardinalità degli insiemi iperfiniti

Un sottoinsieme $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ si dice iperfinito se, nel modello di ${}^*\mathbb{R}$ dato dal quoziente di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ per un ultrafiltro $\mathcal{U}$, esso deriva da una successione $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ di sottoinsiemi finiti quozientati per l'ultrafiltro. Si ha il seguente risultato: un sottoinsieme iperfinito di ${}^*\mathbb{R}$ è finito, oppure ha la cardinalità del continuo.

Osserviamo innanzitutto che si verifica una e una sola delle situazioni seguenti:

- Esiste $K \in \mathbb{N}$ tale che $\{n \in \mathbb{N} | \, |A_n| \leqslant K\} \in \mathcal{U}$;
- Per ogni $K \in \mathbb{N}$ si ha $\{n \in \mathbb{N} | \, |A_n| > K\} \in \mathcal{U}$.

Dimostreremo che nel primo caso l'insieme iperfinito risultante è finito e che nel secondo caso ha la cardinalità del continuo.

Per il primo caso, suddividiamo ulteriormente

$$\{n \in \mathbb{N} | \, |A_n| \leqslant K\} = \bigcup_{i=1}^{K} \{n \in \mathbb{N} | \, |A_n| = i\} ;$$

allora uno degli insiemi a destra, poniamo quello relativo a $i = i_0$ che chiameremo X_0, deve ancora stare nell'ultrafiltro. Creeremo i_0 elementi di $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ e dimostreremo che non ne esistono altri. Per $j = 1, \ldots, i_0$ chiamiamo $\xi_j \in {}^*\mathbb{R}$ la classe della successione che su $n \in X_0$ è uguale al j-esimo elemento di A_n secondo l'ordinamento standard di $\mathbb{R}$; con abuso di notazione chiamiamo ancora ξ_j tale successione. Poiché $X_0 \in \mathcal{U}$, i ξ_j sono ben definiti e a due a due distinti.

Sia ora ξ un qualunque elemento di A che deriva da una successione che, come prima, chiamiamo sempre ξ. Suddividiamo $X_0 = \bigcup_{j=1}^{i_0} \{n \in X_0 | \xi(n) = \xi_j(n)\}$; uno degli insiemi a destra, relativo poniamo a j_0, sta ancora nell'ultrafiltro e pertanto $\xi = \xi_{j_0}$. Quindi in questo caso l'insieme A è finito.

Nel secondo caso si ha che per ogni $h \in \mathbb{N}$ l'insieme $Y_h = \left\{n \in \mathbb{N} | \, |A_n| \geqslant 2^h\right\}$ appartiene ad $\mathcal{U}$, quindi, in particolare, è non vuoto. Costruiremo una funzione iniettiva da $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ad A, il che sarà sufficiente a concludere. Se $n \in Y_1$, esiste $m_n \in \mathbb{N}$ tale che $2^{m_n} \leqslant |A_n| < 2^{m_n+1}$; chiamiamo allora

$$\left\{a_0^{(n)} < a_1^{(n)} < \ldots < a_{2^{m_n}-1}^{(n)}\right\}$$

i 2^{m_n} più piccoli elementi di A_n. Prendiamo ora una funzione $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$, intendendo qui che $\mathbb{N}$ del dominio include lo 0. Per ogni $m \geqslant 1$ naturale, sia $r_{f,m} = \sum_{i=0}^{m-1} f(i)\, 2^i$. Ad f associamo un elemento $\xi_f \in A$ proveniente da una successione che su un $n \in Y_1$ valga $a^{(n)}_{r_{f,m}}$; come prima, chiamiamo sempre ξ_f tale successione. Poiché $Y_1 \in \mathcal{U}$, l'elemento ξ_f è ben definito. Prendiamo ora $g \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ diversa da f e mostriamo che $\xi_f \neq \xi_g$. Sia s il più piccolo naturale sul quale f e g differiscono. Allora, per ogni $m > s$, si ha $r_{f,m} \neq r_{g,m}$, e pertanto le successioni ξ_f e ξ_g differiscono su $Y_{s+1} \in \mathcal{U}$, e definiscono quindi due elementi di A distinti.

Infine, ${}^*\mathbb{R}$ ha la cardinalità del continuo, il che fornisce un limite superiore alla cardinalità di un suo sottoinsieme iperfinito.