Kirill Kuzmin, lezione del 5 ottobre 2012

Presento qui le risoluzioni di tre degli esercizi lasciati alla lezione del 5 ottobre 2012.

I principi di compattezza seguono da Tihonov

Sia X un insieme infinito, r un intero positivo, ed $\mathcal{A}$ una famiglia di insiemi finiti r-regolare su X. Vogliamo dimostrare che:

- Esiste una sottofamiglia finita di $\mathcal{A}$ che è ancora r-regolare su X (II principio di compattezza);
- Esiste $Y \subseteq X$ finito per cui tale sottofamiglia, e quindi $\mathcal{A}$ tutta, è r-regolare su Y (I principio di compattezza).

Assumeremo come ipotesi il Teorema di Tihonov, che dice che il prodotto di una qualsiasi famiglia di spazi topologici compatti è ancora compatto.

Consideriamo l'insieme dei colori $R = \{1, \ldots, r\}$ con la topologia discreta, compatto in quanto finito. Il prodotto R^X è l'insieme di tutte le funzioni da X a R, ossia di tutte le possibili colorazioni di X. Una base di aperti per questo prodotto è data da $\{f : X \to R \text{ tali che } f(x_1) = c_1, \ldots, f(x_n) = c_n\}$ al variare di n tra i naturali, x_i distinti in X e c_i in R, non necessariamente distinti.

Consideriamo ora la famiglia di aperti $\left\{U_{(A,c)}\right\}_{A\in\mathcal{A},c\in R}$, ove

$$U_{(A,c)} = \{f : X \to R \text{ tali che per ogni } a \in A \text{ si abbia } f(a) = c\}.$$

Essendo gli elementi di $\mathcal{A}$ finiti, ogni $U_{(A,c)}$ è effettivamente un aperto di R^X. Non solo; dal fatto che $\mathcal{A}$ sia r-regolare segue che gli $U_{(A,c)}$ formano un ricoprimento aperto di R^X: infatti, fissata una colorazione $f_0 \in R^X$, per regolarità esiste $c_0 \in R$ e $A_0 \in \mathcal{A}$ tale che per ogni $a \in A_0$ si abbia $f(a) = c_0$, ma questo è equivalente ad affermare $f_0 \in U_{(A_0,c_0)}$.

Da Tihonov segue la compattezza di R^X, esiste quindi una sottofamiglia finita $\left\{U_{(A_k,c_k)}\right\}_{k=1,\ldots,m}$ che ricopre ancora R^X, e, per quanto appena osservato, il fatto di essere un ricoprimento per una famiglia siffatta è equivalente all'essere per i relativi A_k una famiglia r-regolare su X. Il secondo principio di compattezza è così dimostrato.

Per dimostrare il primo basta osservare che $\{A_k\}_{k=1,\ldots,m}$, essendo r-regolare su tutto X, è certamente r-regolare su $\bigcup_{k=1}^{m} A_k$, il quale è un sottoinsieme finito di X.

3-colorazione di un grafo su $\mathbb{N}$ indotto da una funzione senza punti fissi

Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione senza punti fissi. Vogliamo dimostrare che esiste una 3-colorazione di $\mathbb{N}$ tale che per ogni $n \in N$ gli interi n e $f(n)$ abbiano colori distinti.

Presento qui una soluzione che utilizza espressamente la compattezza topologica invece di quella combinatorica, che comunque sono molto correlate, come già si è visto nella dimostrazione precedente.

Consideriamo lo spazio $\{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ delle 3-colorazioni di $\mathbb{N}$. Su di esso verrà definita una funzione distanza e si vedrà che la topologia indotta è compatta per successioni.

Definiamo la distanza d tra due colorazioni distinte $a, b \in \{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ come 2^{-k}, ove k è il più piccolo intero nel quale a e b differiscono; la distanza di una colorazione da se stessa è, come sempre, 0. L'unica verifica non banale riguarda la diseguaglianza triangolare. A tal proposito, se due colorazioni a e c differiscono per la prima volta in k, allora sicuramente gli elementi di una tra le coppie (a, b) e (b, c) differiscono per la prima volta in un intero minore o uguale a k e pertanto $2^{-k} = d(a, c) \leqslant \max\{d(a, b), d(b, c)\}$, ossia la metrica costruita è addiritura un'ultrametrica, anche se ciò non sarà necessario.

Sia ora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di colorazioni di $\mathbb{N}$, e vogliamo trovarne una sottosuccessione $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ convergente. Sicuramente esiste una sua sottosuccessione infinita $\left(a_n^{(0)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che i suoi elementi colorano 0 dello stesso colore; se tale proprietà valesse per più colori scegliamo quello col numero più basso. Sia $b_0 = a_0^{(0)}$. Proseguiamo per ricorsione: dalla sottosuccessione $\left(a_n^{(h)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ della successione originaria tale che per ogni naturale minore o uguale ad h esiste un colore con cui tutti gli elementi di questa sottosuccessione colorano quel naturale estraiamo una sottosuccessione infinita $\left(a_n^{(h+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tutti gli elementi della quale colorano dello stesso colore $h+1$; nel caso più colori abbiano questa proprietà scegliamo quello col numero più basso; definiamo infine $b_{h+1} = a_{h+1}^{(h+1)}$.

Per come è definita la successione $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ben definita nel senso che per due interi $i < j$ l'elemento b_i precedeva strettamente b_j nella successione originaria. Affermo che questa sottosuccessione converge alla colorazione b definita da $b(s) = b_s(s)$ per ogni s naturale, in particolare che $d(b, b_m) \leqslant 2^{-(m+1)}$ per ogni m naturale. Infatti, fissato un naturale $s \leqslant m$, si ha che

$$b_m \in \left(a_n^{(m)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \left(a_n^{(s)}\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

pertanto $b_m(s) = b_s(s) = b(s)$ in quanto tutti gli elementi di $\left(a_n^{(h)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ colorano h dello stesso colore per definizione. Ne segue che b_m concorda con b sulla colorazione dei naturali minori o uguali a m, il che si traduce nella condizione sulle distanze.

Passiamo ora alla risoluzione del problema. Definiamo una colorazione c_m che su $\{0, \ldots, m\}$ coincida con una 3-colorazione di questo insieme che rispetti le richieste del problema per le coppie $(n, f(n))$ ivi contenute, e colori i restanti naturali del colore 1; a lezione abbiamo visto che una tale colorazione esiste. $(c_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ha una sottosuccessione convergente $\left(c_{m_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ per quanto appena visto; sia c il suo limite. Affermo che c rispetta le richieste del problema. Siano infatti

n un naturale, $M = \max\{n, f(n)\}$ e k abbastanza grande da avere $m_k \geqslant M$ e $d(c_{m_k}, c) < 2^{-M}$. Allora c coincide con c_{m_k} almeno sui naturali da 0 a M estremi inclusi, e c_{m_k} colora n e $f(n)$ di colori diversi per definizione, quindi anche c.

Note

Le spiegazioni usate per la risoluzione di questo problema possono risultare un po' pesanti, ma hanno il vantaggio di non coinvolgere l'assioma della scelta, che non serve nemmeno per la parte fatta a lezione, né per l'esistenza di colorazioni, alcune delle quali possono essere esibite direttamente, e lo sono durante la risoluzione. Usando l'assioma della scelta si può in alternativa osservare che, mettendo su $\{1, 2, 3\}$ la topologia discreta, lo spazio delle colorazioni risulta compatto per Tihonov, e che la topologia prodotto coincide con quella indotta dalla metrica, che quindi sarà compatta per successioni.

C'è un'altra soluzione fatta "con le mani", che non richiede l'assioma della scelta, e che abbozzo soltanto. Consideriamo il grafo sui naturali tale che due vertici sono collegati se e solo se uno è immagine dell'altro mediante f. Prendiamo la successione formata da $f^k(0)$, ove l'esponente indica l'iterata k-esima di f. Essa può essere iniettiva, oppure esiste il più piccolo intero h tale che $f^h(0)$ è già comparso nella successione; da quel punto in poi essa sarà ciclica. Chiamiamola "successione iniziale" e la coloriamo di due colori se è iniettiva o se il ciclo è di lunghezza pari, di tre colori altrimenti.

In seguito, per ogni x appartenente alla successione iniziale e per ogni y tale che $f(y) = x$, il sottoinsieme di $\mathbb{N}$ formato da elementi tali che applicando loro la f un numero finito di volte si ottiene y è un albero, e due alberi relativi a x e y diversi sono disgiunti, quindi si possono colorare ognuno di due colori in modo che il risultato globale sia coerente. Si dimostra infine che in questo modo abbiamo colorato tutti gli elementi nella componente connessa di 0 del grafo. Si prende quindi, se c'è, il più piccolo elemento di $\mathbb{N}$ non nella componente connessa di 0, e perciò ancora non colorato, e si riparte con un'altra successione iniziale iterando la f su di esso, andando avanti per ricorsione.

Applicazioni della compattezza: Teorema di Van der Werden finito

Il Teorema di Van der Werden in versione infinita afferma che per ogni l, r naturali positivi, l'insieme delle progressioni aritmetiche lunghe l è r-regolare su $\mathbb{N}$. Per compattezza, esso è regolare su un suo sottoinsieme finito A, quindi lo sarà certamente sull'insieme dei naturali da 0 a $\max A$ estremi inclusi. Questo si esprime nella seguente versione finita del Teorema di Van der Werden:

> Fissati l ed r naturali positivi, esiste n naturale tale che per ogni r-colorazione di $\{0, \ldots, n\}$ esiste in questo insieme una successione aritmetica di lunghezza l monocromatica.