Kirill Kuzmin, lezione del 12 ottobre 2012

Presento qui le risoluzioni di due degli esercizi lasciati alla lezione del 12 ottobre 2012.

Cardinalità di $\beta\mathbb{N}$

La famiglia degli ultrafiltri su $\mathbb{N}$ è un sottoinsieme di $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$, pertanto $|\beta\mathbb{N}| \leqslant 2^{\mathfrak{c}}$. Vogliamo vedere che vale l'uguaglianza.

Per farlo lavoreremo sull'insieme numerabile $\mathscr{P}_{\mathrm{Fin}}(\mathbb{Q})$, il che è equivalente a farlo su $\mathbb{N}$, e ne esibiremo un insieme di $2^{\mathfrak{c}}$ famiglie di parti, indicizzate su $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$, tali che ciascuna presa singolarmente abbia la proprietà dell'intersezione finita e possa quindi essere estesa ad un ultrafiltro ma, date due famiglie distinte, esista un sottoinsieme A di $\mathscr{P}_{\mathrm{Fin}}(\mathbb{Q})$ tale che A appartenga ad una famiglia e il suo complementare all'altra, in modo che non sia possibile estenderle ad uno stesso ultrafiltro; otterremo in questo modo una funzione iniettiva dall'insieme $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ di cardinalità $2^{\mathfrak{c}}$ a $\beta\mathbb{N}$, il che concluderà la dimostrazione.

Definiamo quindi per t reale e $f \in \{0,1\}^{\mathbb{R}}$ l'insieme

$$A_f^t = \{Y \in \mathscr{P}_{\mathrm{Fin}}(\mathbb{Q}) \text{ tali che } |Y \cap (-\infty, t)| \equiv f(t) \pmod 2\},$$

e raccogliamo nella famiglia $\mathcal{F}_f$ tutti gli A_f^t al variare di t nei reali; in simboli

$$\mathcal{F}_f = \left\{A_f^t | t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Che due funzioni diverse definiscano due famiglie non estendibili ad uno stesso ultrafiltro è facile; siano infatti $f \neq g$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ tali che $f(t_0) \neq g(t_0)$, allora le famiglie $A_f^{t_0}$ e $A_g^{t_0}$ sono una il complementare dell'altra in $\mathscr{P}_{\mathrm{Fin}}(\mathbb{Q})$ in quanto per un qualunque sottoinsieme finito di $\mathbb{Q}$ la parità della cardinalità della sua intersezione con $(-\infty, t_0)$ è una e una sola tra $f(t_0)$ e $g(t_0)$. Rimane da mostrare che, fissata f, la famiglia $\mathcal{F}_f$ ha la proprietà dell'intersezione finita.

Prendiamo allora $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ reali e costruiamo per ricorsione un sottoinsieme finito dei razionali che stia in $\bigcap_{i=1}^{n} A_f^{t_i}$. Partiamo dall'insieme vuoto. Se $f(t_1) = 1$ mettiamo nell'insieme un razionale minore di t_1, altrimenti non facciamo niente. Per $i = 2, \ldots, n$, se $f(t_{i-1}) \neq f(t_i)$, aggiungiamo all'insieme costruito un razionale strettamente compreso tra t_{i-1} e t_i, altrimenti non facciamo niente. In questo modo, per ogni $i = 1, \ldots, n$, la parità del numero dei razionali nell'insieme costruito strettamente minori di t_i è esattamente $f(t_i)$ come richiesto.

Ultrafiltri selettivi

Per un ultrafiltro $\mathcal{U}$ non principale su $\mathbb{N}$ sono equivalenti:

1) $\mathcal{U}$ è RK-minimale tra gli ultrafiltri non principali su $\mathbb{N}$;

2) Per ogni partizione $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di $\mathbb{N}$ in insiemi non vuoti e non appartenenti ad $\mathcal{U}$ esiste $A \in \mathcal{U}$ tale che per ogni k si abbia $|A \cap X_k| = 1$;

3) Ogni funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è $\mathcal{U}$-equivalente ad una funzione costante oppure ad una funzione biiettiva.

Dimostriamo le implicazioni 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1).

Supponiamo valga la 1). Consideriamo la funzione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che vale costantemente k su X_k. Per ipotesi, $g_* (\mathcal{U})$ è principale oppure isomorfo a $\mathcal{U}$. Tuttavia non può essere principale, infatti se lo fosse ci sarebbe un singoletto $\{k_0\}$ in $g_* (\mathcal{U})$, ma allora $X_{k_0} \in \mathcal{U}$ per definizione di ultrafiltro immagine, il che va contro le ipotesi. Pertanto $g_* (\mathcal{U}) \cong \mathcal{U}$, ed abbiamo dimostrato a lezione che in tal caso g è $\mathcal{U}$-equivalente ad una biiezione di $\mathbb{N}$. Per arrivare ad una biiezione a partire da g, per ogni k naturale è necessario cambiare il suo valore in tutti i punti di X_k tranne al più uno, infatti g è costante su X_k. Ma allora l'insieme $\overline{A}$ su cui la g *non* viene modificata per arrivare ad una biiezione $\mathcal{U}$-equivalente interseca ciascun X_k in al più un punto e sta nell'ultrafiltro; aggiungendogli un punto da ciascuno degli eventuali X_i da esso non intersecati otteniamo un insieme $A \supseteq \overline{A}$ che rispetta le richieste della condizione 2).

Supponiamo ora valga la 2), consideriamo una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ e definiamo $X_k = \{n \in \mathbb{N} | f(n) = k\}$. Se uno degli X_k stesse nell'ultrafiltro, allora la funzione costante k sarebbe $\mathcal{U}$-equivalente ad f, altrimenti esiste un insieme $A \in \mathcal{U}$ che interseca ciascun X_k non vuoto in un solo punto, e in tal caso f è iniettiva su A. A lezione abbiamo visto che una tale funzione è $\mathcal{U}$-equivalente ad una biiezione.

Supponiamo ora valga la 3) e dimostriamo la 1). La tesi si esprime anche dicendo che, se $\mathcal{V}$ è un ultrafiltro su $\mathbb{N}$ tale che $\mathcal{V} = f_* (\mathcal{U})$ per qualche funzione f, allora $\mathcal{V}$ è principale oppure isomorfo a $\mathcal{U}$. Ma se f è $\mathcal{U}$-equivalente ad una funzione costante, allora $\mathcal{V}$ è l'ultrafiltro principale generato da quella costante, se invece f è $\mathcal{U}$-equivalente ad una biiezione, allora $\mathcal{V}$ è isomorfo a $\mathcal{U}$, e per ipotesi non ci sono altri casi.