Kirill Kuzmin, lezione del 17 ottobre 2012

Presento qui la risoluzione, in parte solo abbozzata, dell'esercizio lasciato alla lezione del 17 ottobre 2012.

P-Point

Un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$ si dice *P-Point* se un'intersezione numerabile di suoi intorni in $\beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ è ancora un suo intorno.

Per un ultrafiltro $\mathcal{U}$ non principale su $\mathbb{N}$ sono equivalenti:

1) $\mathcal{U}$ è un P-Point;

2) Per ogni partizione di $\mathbb{N}$ in una famiglia numerabile di insiemi $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ non appartenenti ad $\mathcal{U}$, esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che per ogni k naturale $A_k \cap X$ è finito;

3) Ogni funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è $\mathcal{U}$-equivalente ad una funzione costante o ad una funzione finite-to-one, ossia tale che la controimmagine di un qualunque naturale è finita.

In tutta la dimostrazione supporremo di trattare lo spazio $\beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ con la topologia indotta da quella di $\beta\mathbb{N}$.

Dimostriamo che 1) implica 2). Consideriamo gli insiemi $B_k = \mathbb{N}\backslash A_k$. Poiché $A_k \notin \mathcal{U}$, si ha $B_k \in \mathcal{U}$, pertanto $\{\mathcal{O}_{B_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una famiglia numerabile di intorni di $\mathcal{U}$. Ne segue che la sua intersezione è ancora un intorno di $\mathcal{U}$, possiamo quindi considerare un aperto $\mathcal{O}_B$ della base di $\beta\mathbb{N}$ tale che $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_B \subseteq \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{B_k}$. Si ha perciò $B \in \mathcal{U}$; affermo che B è proprio l'insieme X cercato. Sia infatti per assurdo $i \in \mathbb{N}$ tale che $B \cap A_i$ è infinito. La famiglia formata dal filtro di Frechet e da $B \cap A_i$ ha la proprietà dell'intersezione finita, infatti un'intersezione finita di insiemi cofiniti è ancora un insieme cofinito, che quindi interseca l'insieme infinito $B \cap A_i$. Allora posso estenderla ad un ultrafiltro non principale $\mathcal{V}$, e si ha $B \cap A_i \in \mathcal{V}$. Questo vuol dire da una parte che $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_B$, e dall'altra che $\mathcal{V} \notin \mathcal{O}_{B_i}$, ma allora $\mathcal{O}_B \nsubseteq \mathcal{O}_{B_i}$, assurdo.

Dimostriamo l'implicazione inversa. Innanzitutto, data una famiglia di intorni di $\mathcal{U}$ non è restrittivo ridurci, per ciascuno di essi, ad un aperto della base che contenga $\mathcal{U}$. Dopo aver riordinato questi aperti in qualche modo, a meno di cambiare il j-esimo con l'intersezione dei primi j si può supporre che questi formino una successione decrescente. Gli intorni considerati sono allora $\mathcal{O}_{Y_1} \supseteq \mathcal{O}_{Y_2} \supseteq \ldots \supseteq \mathcal{O}_{Y_j} \supseteq \ldots$, e ciascun Y_i appartiene a $\mathcal{U}$. Se anche la loro intersezione Y vi appartiene allora siamo a posto, perché in tal caso $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_Y \subseteq \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \mathcal{O}_{Y_j}$. In caso contrario, un elemento y che non sta in Y non sta nemmeno in Y_i per qualche i naturale, quindi, per costruzione, esiste n tale che $y \in Y_j$ per $j \leqslant n$ e $y \notin Y_j$ per $j > n$. Allora Y e gli insiemi $A_1 = \mathbb{N}\backslash Y_1$ e $\{A_n = Y_{n-1}\backslash Y_n\}_{n\geqslant 2}$ formano una partizione di $\mathbb{N}$. Nessuno degli insiemi di tale partizione sta in $\mathcal{U}$; per Y è vero per costruzione, e per gli altri si ha $A_n \subseteq \mathbb{N}\backslash Y_n$, ma poiché $Y_n \in \mathcal{U}$, l'insieme A_n non vi appartiene. La condizione 2) ci fornisce un $X \in \mathcal{U}$ che interseca ciascun sottoinsieme della partizione in un numero finito di punti; affermo che $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_X \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{O}_{Y_k}$, il che conclude la dimostrazione. L'appartenenza segue dalle definizioni, per l'inclusione bisogna vedere che ogni ultrafiltro non principale $\mathcal{V}$ che contiene X contiene anche tutti gli Y_j. Se per assurdo $Y_i \notin \mathcal{V}$ per qualche i naturale, l'insieme finito $X \backslash Y_i = \bigcup_{h=1}^{i} X \cap A_h$ dovrebbe appartenere a $\mathcal{V}$, che però non è principale, assurdo.

Per vedere l'equivalenza tra le condizioni 2) e 3) si pone in corrispondenza biunivoca una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con la partizione dei naturali in $\left\{f^{-1}\left(\{k\}\right)\right\}_{k \in \mathbb{N}}$ e si procede analogamente a come si è fatto per gli ultrafiltri selettivi.