Kirill Kuzmin, lezione del 26 ottobre 2012

Presento qui la risoluzione di un esercizio lasciato alla lezione del 26 ottobre 2012.

Enunciati equivalenti a Hindman

Definizione: Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{N}$ si dice additivamente grande se esiste $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito tale che $FS\left(X\right) \subseteq A$, ove con $FS\left(X\right)$ indichiamo l'insieme di tutte le possibili somme non vuote finite di elementi distinti di X.

Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

1) Teorema di Hindman: Data una r-colorazione dei naturali $\mathbb{N} = C_1 \sqcup C_2 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ esiste $i \in \{1, \ldots, r\}$ tale che C_i è additivamente grande;

2) Teorema di Hindman generalizzato: Siano $A \subseteq \mathbb{N}$ additivamente grande e $A = C_1 \sqcup C_2 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ una r-colorazione di A. Allora esiste $i \in \{1, \ldots, r\}$ tale che C_i è additivamente grande;

3) Sia $\mathscr{P}_{FIN}\left(\mathbb{N}\right) = C_1 \sqcup C_2 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ una r-colorazione dell'insieme delle parti finite dei numeri naturali (o di un qualunque insieme numerabile con un ordine isomorfo a quello standard dei naturali). Allora esiste $i \in \{1, \ldots, r\}$ e $\mathcal{F} = \left\{F_j\right\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathscr{P}_{FIN}\left(\mathbb{N}\right)$ tale che per ogni j naturale $\max F_j < \min F_{j+1}$ e $FU\left(\mathcal{F}\right) \subseteq C_i$, ove con $FU\left(\mathcal{F}\right)$ indichiamo l'insieme di tutte le possibili unioni finite non vuote di elementi distinti di $\mathcal{F}$.

Assumeremo che $\mathbb{N}$ non contenga lo zero, e rimuoveremo per comodità l'insieme vuoto da $\mathscr{P}_{FIN}\left(\mathbb{N}\right)$.

Che il secondo enunciato implichi il primo è banale; per concludere dimostreremo le implicazioni 1) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 2).

Notiamo innanzitutto che se A è additivamente grande e X è tale che $FS\left(X\right) \subseteq A$, allora anche $FS\left(\widetilde{X}\right) \subseteq A$, ove $\widetilde{X} = \left\{\sum_{m \in X_j} m\right\}_{j \in \mathbb{N}}$ con $\left\{X_j\right\}_{j \in \mathbb{N}}$ famiglia di sottoinsiemi finiti di X a due a due disgiunti, con le somme degli elementi di X_j a due a due distinte.

Associamo biunivocamente ad ogni sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$ un naturale con la funzione $g : \mathscr{P}_{FIN}\left(\mathbb{N}\right) \to \mathbb{N}$ tale che $g\left(F\right) = \sum_{i \in F} 2^{i-1}$; la corrispondenza è effettivamente biunivoca grazie alle proprietà della scrittura in base 2. Prendiamo ora una r-colorazione di $\mathscr{P}_{FIN}\left(\mathbb{N}\right)$ come nelle ipotesi del 3); essa induce una colorazione su $\mathbb{N}$ con $n \in \mathbb{N}$ che prende il colore di $g^{-1}\left(n\right)$. Per 1) esiste un colore, senza perdita di generalità il verde, e un insieme $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito tale che gli elementi di $FS\left(X\right)$ sono tutti verdi. Sia $x_1 = \min X$, e k_1 il più piccolo intero tale che $2^{k_1} > x_1$. Sono possibili due casi: o esiste un elemento di X divisibile per 2^{k_1}, e in tal caso chiamiamo x_2 il minimo di tali interi, oppure nessun elemento di X è divisibile per 2^{k_1}, ma anche in tal caso c'è un infinità di elementi di X diversi da x_1 che danno lo stesso resto se divisi per 2^{k_1}, e sommandone al più 2^{k_1} distinti, prendendo i più piccoli, si ottiene il naturale x_2 divisibile per 2^{k_1}. Si procede analogamente per ricorsione, avendo cura di costruire x_{j+1} con elementi di X non ancora impiegati per ottenere $x_1, \ldots, x_j$, ossia tutti tranne un numero finito. Se ne ricava un insieme $\widetilde{X} = \{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, con ogni x_j somma di un numero finito di elementi di X, gli insiemi di elementi usati per ottenere ciascun x_j a due a due disgiunti e tale che, se k_j è il minimo intero per cui $2^{k_j} > x_j$, allora x_{j+1} è divisibile per 2^{k_j}. Per l'osservazione fatta sopra, gli elementi di $FS\left(\widetilde{X}\right)$ sono tutti verdi.

Affermo che $\mathcal{F} = \left\{g^{-1}(x_j) \,|\, j \in \mathbb{N}\right\}$ è la famiglia che rispetta la tesi del 3). Innanzitutto, per costruzione $\max g^{-1}(x_j) = k_j < \min g^{-1}(x_{j+1})$. Sia poi $Y \in FU(\mathcal{F})$, allora $Y = \bigcup\limits_{j \in J} g^{-1}(x_j)$ per qualche $J \in \mathbb{N}$ finito non vuoto, e $g(Y) = \sum\limits_{j \in J} x_j$ è verde, pertanto anche Y lo è.

Dimostriamo ora che 3) implica 2). Innanzitutto, dato A additivamente grande e X tale che $FS(X) \subseteq A$ possiamo supporre senza perdita di generalità che $A = FS(X)$ lavorando appunto solo su $FS(X)$. Ordiniamo X secondo l'ordinamento indotto dai naturali, $X = \{x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots\}$. La r-colorazione di A delle ipotesi del 2) induce una r-colorazione di $\mathscr{P}_{FIN}(X)$: ogni sottoinsieme finito viene colorato del colore della somma dei suoi elementi in A. Allora per 3) esiste $\mathcal{F} = \{F_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tale che per ogni j naturale $\max F_j < \min F_{j+1}$ e gli insiemi di $FU(\mathcal{F})$ sono tutti dello stesso colore, senza perdita di generalità il verde. Siano $a_j = \sum\limits_{m \in F_j} m$; sono tutti elementi di A a due a due distinti, e sia $Y = \{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$. Ovviamente $FS(Y)$ è additivamente grande, vogliamo vedere che $FS(Y) \subseteq A$ e che gli elementi di $FS(Y)$ sono tutti verdi. Fissato un $J \subseteq \mathbb{N}$ finito, $\sum\limits_{j \in J} a_j = \sum\limits_{m \in \bigcup_{j \in J} F_j} m$; perciò questa somma sta in A per definizione di X e il suo colore è lo stesso di $\bigcup\limits_{j \in J} F_j$, cioè il verde per definizione di $\mathcal{F}$.