Capitolo 1

Richiami vari

1.1 Stone-Weierstrass

Definizione 1.1.1. Se V è uno spazio vettoriale, si dice che $A \subseteq V$ è una *sottoalgebra* di V se è un sottospazio vettoriale chiuso per prodotto.

Definizione 1.1.2. Se X è uno spazio topologico, denotiamo con $C(X, \mathbb{R})$ lo spazio delle funzioni continue da X a $\mathbb{R}$, solitamente dotato della norma $\|\cdot\|_\infty$.

Definizione 1.1.3. Se X è uno spazio topologico e A è una sottoalgebra di $C(X, \mathbb{R})$, diremo che A *separa i punti* se $\forall x, y \in X \;\; \exists f \in A : f(x) \neq f(y)$.

Teorema 1.1.4 (Stone-Weierstrass)**.** *Sia X uno spazio T2 e compatto, sia A una sottoalgebra di $C(X, \mathbb{R})$ che contiene le costanti. Allora A è denso in $C(X, \mathbb{R})$ se e solo se separa i punti.*

Corollario 1.1.5 (approssimazione di Weierstrass)**.** *Sia $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo chiuso limitato. Allora i polinomi sono densi in $C([a, b])$.*

1.2 Somme di Cesaro

Definizione 1.2.1. Dato uno spazio vettoriale normato E, diremo che una successione $(a_n) \subset E$ ammette la *somma di Cesaro* se

$$\exists \lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} < \infty.$$

Si verifica facilmente che se $a_n \to a$ in E allora la somma di Cesaro di (a_n) esiste ed è proprio a; il viceversa non è in generale soddisfatto.

Esempio 1.2.2. Si consideri in $\mathbb{R}$ la successione $(a_n) = (1, 0, 1, 0, \ldots)$: non converge ma ammette somma di Cesaro $1/2$.

1.3 Varie ed eventuali

Teorema 1.3.1 (Darboux)**.** *Sia* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervallo aperto e* $f : I \to \mathbb{R}$ *continua e derivabile. Allora* $\forall a, b \in I$ *con* $a < b$*, la derivata* f' *assume in* $[a, b]$ *tutti i valori compresi tra* $f'(a)$ *e* $f'(b)$*.*

Dimostrazione. Sia y un valore compreso tra $f'(a)$ e $f'(b)$: se è assunto in a o in b abbiamo finito, altrimenti supponiamo wlog $f'(a) > y > f'(b)$ e definiamo $\phi(t) = f(t) - yt$. La nuova funzione è continua e dovrà assumere massimo in $[a, b]$, tuttavia non può farlo negli estremi perché $\phi'(a) > 0$ e $\phi'(b) < 0$, dunque $\exists x \in [a, b]$ tale che $\phi'(x) = 0$, cioè $f(x) = y$. □

Proposizione 1.3.2. *Sia* $f \in C^1(\mathbb{R})$ *tale che* $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$*. Allora* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$*.*

Dimostrazione. Dalle ipotesi è giustificata l'esistenza del limite:

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)\, dt < \infty,$$

ma per l'integrabilità di f questo limite deve necessariamente essere nullo. Si dimostra analogamente che anche $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. □

Capitolo 2

Spazi di dimensione infinita

Vale il seguente risultato di caratterizzazione degli operatori lineari continui tra spazi vettoriali normati, interessante soprattutto in dimensione infinita.

Proposizione 2.0.3. *Siano X, Y spazi vettoriali normati, sia $T : X \to Y$ un operatore lineare. Allora le seguenti sono equivalenti:*

(i) T è continua in un punto;

(ii) T è continua in ogni punto;

(iii) T manda una palla chiusa in un insieme limitato;

(iv) T manda le palle chiuse in insiemi limitati.

Vediamo dei primi esempi di spazi vettoriali di dimensione infinita:

Definizione 2.0.4. Se $1 \leq p < \infty$ definiremo gli spazi

$$\ell^p = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \ \mid \ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

dotati della norma $\|(x_n)\|_{\ell^p} = (\sum |x_n|)^{1/p}$. Definiremo inoltre lo spazio

$$\ell^\infty = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \ \mid \ \sup_{n \in \mathbb{N}}(|x_n|) < \infty \right\},$$

dotato della norma $\|(x_n)\|_{\ell^\infty} = \sup(|x_n|)$.

Questi spazi ereditano la somma e il prodotto per scalare dello spazio delle successioni reali. Lo spazio ℓ^2 ha anche la solita struttura di prodotto scalare.

Elenchiamo di seguito alcune proprietà di ℓ^2:

1. ℓ^2 è uno spazio vettoriale di dimensione infinita.

   Dimostrazione. Ricordare che $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$. □

2. ℓ^2 è uno spazio completo.

Dimostrazione. Costruire il limite $\bar{x} = (\bar{x}_k)$ componente per componente, dopodiché osservare che

$$\sum_{k=1}^{M}(x_k^{(m)} - x_k^{(n)})^2 < \varepsilon \qquad \forall m, n \geq N, \quad \forall M \in \mathbb{N}$$

passa al limite come $\sum_{k=1}^{M}(x_k^{(m)} - \bar{x}_k)^2 \leq \varepsilon$ e poi si passa al sup. □

3. La palla chiusa unitaria di ℓ^2 non è compatta.

   Dimostrazione. Basta prendere la successione (e_n). □

4. Esistono endomorfismi lineari di ℓ^2 che sono iniettivi ma non surgettivi, e viceversa.

   Dimostrazione. Considerare gli operatori di shift

   $$(x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, \ldots),$$
   $$(x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots).$$ □

5. Esistono endomorfismi lineari continui $T \in \mathcal{L}(\ell^2)$ tali che $(Tx, x) > 0$ per ogni $x \neq 0$, ma T non è bigettivo.

   Dimostrazione. Considerare l'operatore $T : (x_n) \mapsto (\frac{1}{n}x_n)$. □

6. Le norme definibili in ℓ^2 non sono tutte equivalenti.

   Dimostrazione. Confrontare la norma ℓ^2 con la norma

   $$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^2\right)^{\frac{1}{2}}$$ □

7. La convergenza componente per componente non implica la convergenza in ℓ^2.

   Dimostrazione. Considerare (e_n). □

8. In ℓ^2 i sottospazi vettoriali di dimensione finita sono ancora chiusi, ma non tutti i sottospazi sono chiusi.

   Dimostrazione. I sottospazi di dimensione chiusa si immergono in $\mathbb{R}^N$. Si consideri ora il sottospazio

   $$V = \{x = (x_n) \in \ell^2 \mid x_n \neq 0 \text{ per finiti } n\} :$$

   si verifica che $(\frac{1}{n}) \notin V$, ma si può approssimare a piacere con elementi di V. □

Esempio 2.0.5. Un esempio di sottoinsieme "grande" ma relativamente compatto di ℓ^2 è il *cubo di Hilbert*:

$$H = \left\{x = (x_n) \in \ell^2 \mid \forall n \in \mathbb{N} \ |x_n| \leq \frac{1}{n}\right\}$$

Capitolo 3

Spazi euclidei

Definizione 3.0.6. Diremo che uno spazio vettoriale E è uno *spazio euclideo* se è dotato di prodotto scalare; E sarà in genere dotato della norma indotta dal suo prodotto scalare.

Esempio 3.0.7. Esempi di spazi euclidei sono ℓ^2, gli spazi $\mathbb{R}^N$ e gli spazi $L^2(\Omega)$ (che definiremo per bene più avanti).

Proposizione 3.0.8. *Una norma $\|\cdot\|$ su uno spazio vettoriale E è indotta da un prodotto scalare se e solo se rispetta l'*identità del parallelogramma*:*

$$\forall x, y \in E \qquad \frac{\|x+y\|^2}{2} + \frac{\|x-y\|^2}{2} = \|x\|^2 + \|y\|^2. \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Supponiamo prima che la norma sia indotta da un prodotto scalare: in particolare avremo

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x,y),$$
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - (x,y),$$

da cui sommando otteniamo l'identità del parallelogramma, e sottraendo otteniamo

$$(x,y) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2). \tag{3.2}$$

Supponiamo adesso che la norma $\|\cdot\|$ soddisfi l'identità del parallelogramma, e definiamo

$$(x,y) : E \times E \to \mathbb{R}$$

tramite (3.2): dobbiamo verificare che sia effettivamente un prodotto scalare e che induca la norma $\|\cdot\|$.

- Si verifica immediatamente che $(x,x) = \|x\|^2$, $(x,0) = 0$, $(y,x) = (x,y)$ e $(x,-y) = -(x,y)$.
- Dobbiamo mostrare che $(x, y+z) = (x,y) + (x,z)$. Osserviamo applicando la (3.1) che

$$\begin{aligned}
&(x, y+z) - (x,y) - (x,z) = \\
&\quad = \frac{1}{4}\left((\|x+y+z\|^2 + \|x-y\|^2) - (\|x-y-z\|^2 + \|x+y\|^2) - \|x+z\|^2 - \|x-z\|^2\right) \\
&\quad = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\|2x+z\|^2 - \frac{1}{2}\|2x-z\|^2 + \|x-z\|^2 - \|x+z\|^2\right)
\end{aligned}$$

non dipende dalla scelta di y (e per simmetria neanche da quella di z). Di conseguenza possiamo fissare $y = z = 0$ e ottenere $(x, y+z) - (x, y) - (x, z) = (x, 0) - (x, 0) - (x, 0) = 0$.

- Per induzione otteniamo immediatamente $(nx, y) = n(x, y)$ per $n \in \mathbb{Z}$.
- Osserviamo $(\frac{n}{m}x, y) = \frac{1}{m}mn(\frac{1}{m}x, y) = \frac{n}{m}(x, y)$ per $\frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$.
- Concludiamo $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ per continuità, osservando che

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x+y\| - \|x-y\|)(\|x+y\| + \|x-y\|) \leq \min(\|x\|, \|y\|)(\|x\| + \|y\|),$$

da cui si verifica che $(\,\cdot\,, y)$ è continua per ogni y fissato. $\square$

Esempio 3.0.9. Con l'identità del parallelogramma si può verificare che la norma p su $\mathbb{R}^N$ (con $N \geq 2$) è indotta da un prodotto scalare se e solo se $p = 2$, applicandola ai vettori $u = e_1 + e_2$ e $v = e_1 - e_2$. Analogamente si mostra che ℓ^p è uno spazio euclideo se e solo se $p = 2$.

Proposizione 3.0.10 (disugugaglianza di Cauchy-Schwarz)**.** *Sia E uno spazio euclideo: allora $\forall x, y \in E$ vale $|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$.*

Dimostrazione. Fissati $x, y \in E$ impostiamo:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + \lambda^2\|y\|^2 + 2\lambda(x, y) \geq 0.$$

Giocando sul segno di λ ricaviamo

$$|(x, y)| \leq \frac{1}{2}\left(|\lambda|^{-1}\|x\|^2 + |\lambda|\|y\|^2\right)$$

e si conclude minimizzando il RHS (si ricava $|\lambda| = \|x\|\|y\|^{-1}$). $\square$

Possiamo ora dare una definizione di angolo compreso tra due vettori:

Definizione 3.0.11. Se E è uno spazio euclideo e $x, y \in E$ sono due vettori, definiremo il coseno dell'angolo compreso tra x e y come

$$\cos\theta = \frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|}.$$

Si osservi infatti che per Cauchy-Schwarz $\cos\theta \in [-1, 1]$. Questa definizione è equivalente a quella geometrica.

Spazi euclidei complessi

Sarà talvolta comodo lavorare su spazi vettoriali su $\mathbb{C}$.

Definizione 3.0.12. Diremo che uno spazio vettoriale complesso E è uno *spazio euclideo complesso* se è dotato di prodotto hermitiano; E sarà in genere dotato della norma indotta da tale prodotto.

La maggior parte dei risultati validi per spazi euclidei reali si estendono agli spazi euclidei complessi, con qualche accorgimento in più.

3.1 Sistemi ortogonali

Definizione 3.1.1. Se E è uno spazio euclideo, una famiglia arbitraria di vettori $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ è detta *sistema ortogonale* se è composta da vettori a due a due ortogonali. Si dirà inoltre che è un *sistema ortonormale* se i vettori che la compongono sono di norma unitaria. Un sistema ortogonale si dice *completo* se il suo span è denso in E.
Dato un sistema ortonormale $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ in E, denoteremo in genere $c_i(x) = (x, \varphi_i)$, o più semplicemente $c_i = (x, \varphi_i)$ quando non c'è ambiguità.
Osservazione 3.1.2. Ogni sistema ortogonale è composto da vettori linearmente indipendenti (nel senso di combinazioni lineari finite): la verifica è immediata. In questo senso i sistemi ortogonali completi sono detti anche *basi ortogonali*, o alternativamente *basi di Hilbert*.

Esempio 3.1.3. Non è detto che una base ortogonale sia anche una base algebrica. Infatti $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una base ortogonale per ℓ^2, ma $(1/n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ non si può scrivere come combinazione lineare finita di e_j.

Dato che in generale i sistemi ortogonali possono avere cardinalità più che numerabile, può essere utile definire una somma generalizzata.

Definizione 3.1.4. Se $\{a_i\}_{i\in I}$ è una famiglia arbitraria di numeri reali non-negativi, allora definiamo la somma degli a_i come il sup sulle somme finite, cioè

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup\left\{\sum_{k=1}^{m} a_{i_k} \mid k \in \mathbb{N},\ \ i_1, \dots, i_k \in I\right\}.$$

Osservazione 3.1.5. La definizione di somma arbitraria corrisponde a quella solita nei casi di somme finite o numerabili. Si verifica inoltre che se $\sum_{i\in I} a_i < \infty$, allora $a_i \neq 0$ solo per una quantità numerabile di indici: basta considerare gli insiemi $A_i = \{a_i \mid a_i > 1/n\}$ e osservare che devono avere tutti cardinalità finita.

Proposizione 3.1.6 (disuguaglianza di Bessel)**.** *Sia E uno spazio euclideo, sia $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ un sistema ortonormale. Sia $x \in E$: allora per ogni sottoinsieme finito $\{\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m}\} \subseteq \{\varphi_i\}_{i\in I}$ la mappa*

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m \quad \mapsto \quad \left\| x - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \varphi_{i_k} \right\|^2$$

ammette valore minimo $\|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m} c_{i_k}^2$ *quando $\alpha_k = c_{i_k}$; in particolare passando al* sup*:*

$$\sum_{i\in I} c_k^2 \leq \|x\|^2 \qquad (\textit{disuguaglianza di Bessel}).$$

Dimostrazione. Facendo i conti:

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \varphi_{i_k} \right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^2 - 2\sum_{k=1}^{m} \alpha_k c_{i_k} = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m} c_{i_k}^2 + \sum_{k=1}^{m} (\alpha_k - c_{i_k})^2,$$

che assume valore minimo per $\alpha_k = c_{i_k}$; sostituendo si conclude. □

Osservazione 3.1.7. Se $\{\varphi_o\}_{i\in I}$ è un sistema ortonormale più che numerabile, la disuguaglianza di Bessel ci dice anche che $\forall x \in E$ esiste una quantità numerabile di indici $i \in I$ tali che $(x, \varphi_i) \neq 0$.

3.1.1 Sistemi ortonormali chiusi

Definizione 3.1.8. Diremo che un sistema ortonormale $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ è *chiuso* in E se rispetta l'identità di Parseval, cioè se

$$\forall x \in E \qquad \sum_{i\in I} c_i(x)^2 = \|x\|^2.$$

Osservazione 3.1.9. Se vale l'identità di Parseval, in particolare

$$\forall x, y \in E \quad (x, y) = \sum_{i\in I} c_i(x)c_i(y) :$$

basta impostare $2(x, y) = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$.

Teorema 3.1.10 (Parseval)**.** *Sia E uno spazio euclideo e $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormale chiuso in E numerabile infinito. Siano $x \in E$ e $S_n = \sum_{i=1}^n c_i\varphi_i$: allora $S_n \to x$ in E.*

Dimostrazione. Ricordando la disuguaglianza di Bessel si ha esattamente

$$\|x - S_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n c_i^2 \to 0. \qquad \square$$

Osservazione 3.1.11. Fissato $x \in E$, possiamo chiederci come modificare il teorema di Parseval nel caso il sistema ortonormale sia finito o più che numerabile. Se il sistema ortonormale ha cardinalità $n < \infty$, si ha chiaramente $x = S_n$. Se il sistema ortonormale ha cardinalità più che numerabile, comunque solo una quantità numerabile di indici $i_k \in I$ soddisferà $(x, \varphi_{i_k}) \neq 0$, e possiamo ricondurci ai casi precedenti restringendo la base ortonormale agli indici i_k.

Osservazione 3.1.12. Un corollario immediato del teorema di Parseval è che i sistemi ortonormali chiusi sono completi, dato che $(S_n) \subset \operatorname{span}(\{\varphi_i\})$ è una successione che approssima x. D'altra parte, se $\{\varphi_i\}$ è un sistema ortonormale completo, qualunque $x \in E$ ammette successione approssimante $(x_n) \subset \operatorname{span}(\{\varphi_i\})$, tale che $\|x - x_n\|^2 < 1/n$; basta osservare che per la disuguaglianza di Bessel

$$\|x - x_n\|^2 = \left\| x - \sum_{k=1}^{h_n} \alpha_k^{(n)} \varphi_{i_k} \right\|^2 \geq \|x\|^2 - \sum_{i\in I} c_i^2$$

per concludere che i sistemi ortonormali completi sono chiusi; si tratta dunque di definizioni equivalenti.

Vale anche una sorta di freccia opposta del teorema di Parseval:

Proposizione 3.1.13. *Sia E uno spazio euclideo e $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormale numerabile infinito. Sia $x \in E$, sia $(\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una successione di coefficienti reali e sia $S_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i\varphi_i$ una successione tale che $S_n \to x$ in E. Allora $\forall i \in \mathbb{N}\ \ \alpha_i = c_i$.*

Dimostrazione. Fissato $k \in \mathbb{N}$, $\forall \varepsilon > 0$ scegliere $n \geq k$ tale che $\|x - S_n\| < \varepsilon$ e osservare che

$$|c_k - \alpha_k| = |(x - S_n, \varphi_k)| \leq \|x - S_n\|\|\varphi_k\| < \varepsilon,$$

da cui si conclude per arbitrarietà di $\varepsilon > 0$. $\square$

Osservazione 3.1.14. Anche questa proposizione si può risistemare nel caso di sistemi ortonormali finiti o più che numerabili. Nel caso finito è ovvio perché stiamo parlando di combinazioni lineari finite di vettori linearmente indipendenti. Il caso non numerabile è più complicato: la successione approssimante S_n sarà presa a partire da una successione (o da una quantità finita) di indici i_k, e si dovrà mostrare che, a meno di coefficienti α_{i_k} nulli, gli indici corrispondono agli i_k per i quali $c_{i_k} \neq 0$, e ci sarà ancora corrispondenza tra i c_{i_k} e gli α_{i_k}.

3.1.2 Spazi euclidei separabili

Negli spazi euclidei separabili possiamo dire qualcosa di più:

Teorema 3.1.15. *Se E è uno spazio euclideo separabile e $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ è un sistema ortogonale di E, allora I ha cardinalità numerabile.*

Dimostrazione. Sia $D \subset E$ denso e numerabile. Wlog $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ è un sistema ortonormale, da cui $\|\varphi_i - \varphi_j\| = \sqrt{2}$ per $i \neq j$. Da questo deduciamo che $B(\varphi_i, 1/\sqrt{2})$ è un sistema di palle aperte disgiunte della stessa cardinalità di I. Ciascuna palla dovrà contenere almeno un elemento di D, e due palle diverse non possono mai contenere lo stesso elemento, quindi possiamo costruire un'applicazione iniettiva $I \to \mathbb{N}$. □

Teorema 3.1.16. *Gli spazi euclidei separabili ammettono base ortonormale (numerabile).*

Dimostrazione. Prendere un denso numerabile e applicare Gram-Schmidt induttivamente. □

Proposizione 3.1.17. *Se uno spazio euclideo ammette base ortonormale numerabile, allora è separabile.*

Dimostrazione. Sia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormale numerabile di E. Basta osservare che

$$\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \subset \mathrm{span}(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}) \subset E$$

sono spazi uno denso nell'altro, e quello più a sinistra è numerabile. □

Mostriamo ora che gli spazi euclidei separabili di dimensione infinita si immergono in ℓ^2. Più precisamente:

Proposizione 3.1.18. *Sia E uno spazio euclideo separabile di dimensione infinita. Sia $(\varphi_n) \subset E$ una base ortonormale numerabile infinita di E, e sia*

$$\Phi : E \to \ell^2 \quad | \quad \Phi(x) = (c_n(x))_{n\in\mathbb{N}} :$$

allora Φ è un'isometria lineare, compatibile con i prodotti scalari di E e ℓ^2.

Dimostrazione. La buona definizione e l'isometria sono immediate per l'identità di Parseval, la linearità è una verifica e la compatibilità dei prodotti scalari è l'Osservazione 3.1.9. □

3.2 Spazi di Hilbert

Definizione 3.2.1. Uno spazio euclideo H si dice *spazio di Hilbert* se è completo rispetto alla topologia indotta dalla norma.

Teorema 3.2.2 (Riesz-Fischer)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert separabile di dimensione infinita e sia $(\varphi_i) \subset H$ un sistema ortonormale numerabile. Allora $\forall (c_n) \in \ell^2 \ \exists!\, x \in H$: tale che*

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i \to x \qquad \text{in } H.$$

Dimostrazione. Si verifica che S_n è una successione di Cauchy e quindi $S_n \to x \in H$ per completezza. L'unicità di x segue dall'unicità del limite. □

Combinando questo teorema con la Proposizione 3.1.18 e la Proposizione 3.1.13 si ottiene il seguente:

Teorema 3.2.3. *Sia H uno spazio di Hilbert separabile di dimensione infinita. Allora la mappa $\Phi : H \to \ell^2$ definita nella Proposizione 3.1.18 è un isomorfismo di spazi euclidei.*

3.2.1 Proiezione su convessi chiusi

Teorema 3.2.4. *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $K \subseteq H$ un convesso chiuso e non vuoto. Allora $\forall f \in H \ \exists!\, u \in K$ tale che $|f - u| = \min_{v \in K} |f - v|$; inoltre tale u è caratterizzato da*

$$u \in K, \qquad \forall v \in K \quad (f - u, v - u) \leq 0. \tag{3.3}$$

Definizione 3.2.5. Il punto $u \in K$ del teorema precedente è detto *proiezione* di f su K, ed è generalmente denotato con $u = P_K f$.

Dimostrazione. La dimostrazione si divide in tre step:

(Esistenza) Sia $d = \inf_{v \in K} |f - v| < \infty$ e $(v_n) \subseteq K$ una successione tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |f - v_n| < d + 1/n.$$

Vogliamo mostrare che (v_n) è una successione di Cauchy: in questo modo $v_n \to u \in K$ per completezza e $|f - u| = d$ per continuità. Sfruttando l'identità del parallelogramma

$$|v_m - v_n|^2 = 2|f - v_m|^2 + 2|f - v_n|^2 - 4\left|f - \frac{v_m + v_n}{2}\right|^2 < 4d\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \to 0$$

perché $(v_m + v_n)/2 \in K$.

(Caratterizzazione I) Sia $u \in K$ tale che $|f - u| = d$ e sia $v \in K$. Per convessità $\forall t \in [0, 1]$ si ha $w(t) = tv + (1 - t)u \in K$ da cui $|f - w(t)| \geq d^2$, ma anche

$$|f - w(t)|^2 = |f - u - t(v - u)|^2 = d^2 - 2t(f - u, v - u) + t^2|v - u|^2,$$

da cui $\forall t \in\ ]0, 1]$ $\ (f - u, v - u) \leq \frac{1}{2}t|v - u|^2$ e passando al limite per $t \to 0$ si ottiene $(f - u, v - u) \leq 0$.

(Caratterizzazione II e unicità) Supponiamo $u_1 \in K$ soddisfi (3.3). Per il primo punto $\exists u_2 \in K$ tale che $|f - u_2| = d$, e per il secondo punto anche u_2 soddisfa (3.3). Di conseguenza

$$\begin{cases} (f - u_1, u_2 - u_1) \leq 0 \\ (f - u_2, u_1 - u_2) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (u_2 - u_1, u_2 - u_1) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = u_2.$$

Questo conclude la caratterizzazione e dà l'unicità. □

Come ci si aspetta, la proiezione non aumenta le distanze:

Proposizione 3.2.6. *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $K \subseteq H$ un convesso chiuso e non vuoto: allora $\forall f, g \in H$ $|P_K f - P_K g| \leq |f - g|$.*

Dimostrazione. Se $u = P_K f$ e $v = P_K g$ allora

$$\begin{matrix} (\, f - u \,, v - u\,) \leq 0 \\ (\, g - v \,\,, u - v\,) \leq 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad (f - g - (u - v), u - v) \leq 0$$

da cui $|u - v|^2 \leq (f - g, u - v) \leq |f - g||u - v|$ e si conclude. □

Questo risultato può essere migliorato nel caso di sottospazi vettoriali chiusi:

Proposizione 3.2.7. *Sia H uno spazio di Hilbert e sia $M < H$ un sottospazio vettoriale chiuso. Allora $\forall f \in H$ la proiezione $u = P_M f$ è caratterizzata da*

$$u \in M, \qquad \forall v \in M \quad (f - u, v) = 0. \tag{3.4}$$

Inoltre $P_M \in \mathcal{L}(H, M)$; se $\dim M \geq 1$ si avrà anche $\|P_M\| = 1$.

Dimostrazione.

- Se u soddisfa (3.4) soddisferà in particolare (3.3), perché $M - u = M$.
- Se u soddisfa (3.3) basta osservare che $(f - u, v) = (f - u, (v \pm u) \mp u)$.
- Mostriamo la linearità. Siano $P_M f = u$, $P_M g = v$, $P_M(f + \lambda g) = w$: dovranno soddisfare

$$\begin{cases} (f - u, M) = 0 \\ (g - v, M) = 0 \\ (f + \lambda g - w, M) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} (f - u, M) = 0 \\ (\lambda g - \lambda v, M) = 0 \\ (w - f - \lambda g, M) = 0 \end{cases}$$

  da cui sommando $(w - u - \lambda v, M) = 0$ e quindi $w = u + \lambda v$, notando che $w - u - \lambda v \in M$.
- $\|P_M\| \leq 1$ grazie alla Proposizione 3.2.6; è chiaro che se $M \setminus \{0\} \neq \emptyset$ allora $\|P_M\| = 1$. □

Concludiamo con un teorema che identifica ogni spazio di Hilbert con il suo duale:

Teorema 3.2.8 (di rappresentazione di Riesz)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert. Allora $\forall \varphi \in H^*$ esiste un'unica $f \in H$ tale che*

$$\forall u \in H \quad \langle \varphi, u \rangle = (f, u).$$

Inoltre tale f soddisfa $|f| = \|\varphi\|$.

Dimostrazione.

- Se $\varphi = 0$ la tesi è banale; sia dunque $\varphi \neq 0$: $M = \ker \varphi$ sarà un sottospazio vettoriale chiuso e contenuto propriamente in H.
- Si prenda $g \in B_H$ tale che $(g, M) = 0$ (basta porre $g = g_0 - P_M g_0$ con $g_0 \notin M$, grazie a (3.4), e poi riscalare). Osserviamo che $(g, M) = 0$ implica $g \notin M$, quindi $\langle \varphi, g \rangle = \alpha \neq 0$.
- Scriviamo ciascuna $x \in H$ come $x = y(x) + z(x)$, dove

$$y(x) = \frac{\langle \varphi, x \rangle}{\langle \varphi, g \rangle} g, \qquad z(x) = x - \frac{\langle \varphi, x \rangle}{\langle \varphi, g \rangle} g.$$

  Si verifica che $z(x) \in M$ e $(\alpha g, y(x)) = \langle \varphi, x \rangle$, da cui $(\alpha g, x) = \langle \varphi, x \rangle$.
- Per l'unicità se $f_1, f_2 \in H$ soddisfano la relazione, allora

$$(f_1, f_1 - f_2) = (f_2, f_1 - f_2) \quad \Rightarrow \quad f_1 = f_2.$$

- Per la norma basta osservare che $|\langle \varphi, u \rangle| = |(f, u)| \leq |f||u|$ e $(f, f) = |f|^2$. $\square$

Capitolo 4

Spazi L^p

Le funzioni negli spazi che definiremo in questa sezione sono sempre definite "quasi ovunque", cioè identifichiamo tra loro funzioni che differiscono su insiemi di misura nulla.

Definizione 4.0.9. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ è un insieme misurabile e $1 \leq p < \infty$, definiamo lo spazio

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \int_\Omega |f|^p < \infty \right\},$$

che dotiamo della norma $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |f|^p$. Definiamo inoltre lo spazio

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \operatorname*{supess}_\Omega |f| < \infty \right\},$$

che dotiamo della norma $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{supess}_\Omega |f|$.

Nel caso particolare di $L^2(\Omega)$, possiamo dotarlo di un prodotto scalare:

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega fg.$$

Per dimostrare che queste sono effettivamente delle norme serve

Teorema 4.0.10 (disuguaglianza di Hölder)**.** *Sia $1 \leq p \leq \infty$ e siano $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$. Allora $fg \in L^1(\Omega)$ e vale $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$.*

Con questa si può dimostrare infatti la "disuguaglianza triangolare":

Proposizione 4.0.11 (disuguaglianza di Minkowski)**.** *Siano $f, g \in L^p(\Omega)$: allora*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Proseguiamo con un'interessante disuguaglianza ottenuta tramite Hölder:

Proposizione 4.0.12 (disuguaglianza di interpolazione convessa)**.** *Siano $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ con $p \leq q$, sia $r \in [p, q]$ e sia $\theta \in [0, 1]$ tale che $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$ (esiste sempre). Allora $f \in L^r(\Omega)$ e vale la disuguaglianza*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\theta \|f\|_q^{1-\theta}.$$

Dimostrazione. Osserviamo che
$$1 = \frac{r\theta}{p} + \frac{r(1-\theta)}{q} =: \frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{p}'}$$
e che
$$|f|^r = |f|^{r\theta}|f|^{r(1-\theta)} = |f|^{\frac{p}{\tilde{p}}}|f|^{\frac{q}{\tilde{p}'}} =: f_p f_q$$
con $f_p \in L^{\tilde{p}}$ e $f_q \in L^{\tilde{p}'}$. Si applica quindi Hölder. □

Proposizione 4.0.13. *Sia* $1 \leq q < \infty$ *e* $f \in L^q(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$*: allora* $\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}$.

Dimostrazione. Se $\|f\|_{L^\infty} = 0$ allora $f = 0$ e la tesi è banale. Sia $M = \|f\|_{L^\infty} > 0$ ed $\varepsilon \in]0, M[$ qualsiasi, sia $D_\varepsilon = \{|f| > M - \varepsilon\}$: necessariamente $0 < \mu(D_\varepsilon) < \infty$ e
$$\|f\|_{L^p} \geq \left(\int_{D_\varepsilon} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq (M-\varepsilon)\mu(D_\varepsilon)^{\frac{1}{p}} \quad \Rightarrow \quad \liminf_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} \geq M,$$
D'altra parte, per $p \geq q$ si ha
$$\|f\|_{L^p} = \left(M^{p-q}\int_\Omega |f|^q\right)^{\frac{1}{p}} = M^{1-\frac{q}{p}}\|f\|_{L^q}^{\frac{q}{p}} \quad \Rightarrow \quad \limsup_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} \geq M.$$
□

C'è un'importante relazione che lega gli spazi ℓ^p a quelli L^p:
Osservazione 4.0.14. Si considerino le funzioni in $L^p(\mathbb{R})$ della forma
$$f = \sum_{n=1}^\infty a_n \chi_{[n-1,n[}, \qquad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}.$$
Chiaramente $f \in L^p(\mathbb{R})$ se e solo se $(a_n) \in \ell^p$, e la mappa
$$\varphi : \ell^p \to L^p(\mathbb{R}) \quad | \quad (a_n) \mapsto \sum_{n=1}^\infty a_n \chi_{[n-1,n[}$$
è un'isometria lineare; dunque ℓ^p si immerge in $L^p(\mathbb{R})$. In particolare, dato che ℓ^p soddisfa la regola del parallelogramma se e solo se $p = 2$, anche L^p è uno spazio euclideo se e solo se $p = 2$.

4.1 Proprietà degli spazi L^p

Teorema 4.1.1 (separabilità)**.** *Se* $1 \leq p < \infty$ *allora* $L^p(\Omega)$ *è separabile.*

Teorema 4.1.2 (completezza)**.** *Se* $1 \leq p \leq \infty$*, allora* $L^p(\Omega)$ *è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Separiamo i casi $p = \infty$ e $1 \leq p < \infty$.

($p = \infty$) Sia $(f_n) \subset L^\infty(\Omega)$ una successione di Cauchy: è chiaro che $(f_n(x)) \subset \mathbb{R}$ sarà una successione di Cauchy uniformemente quasi ovunque, dunque $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ è ben definito quasi ovunque e $\|f - f_n\|_{L^\infty} \to 0$. Concludiamo che $f \in L^\infty(\Omega)$ con Minkowski.

$(1 \le p < \infty)$ Sia $(f_n) \subset L^p(\Omega)$ una successione di Cauchy: a meno di passare a sottosuccessioni avremo $\|f_{n+1} - f_n\| < 2^{-n}$. Sia $g_n = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1} - f_k|$: avremo $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|g_n\|_{L^p} < 1$, da cui per Beppo-Levi $g = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{k+1} - f_k|$ è ben definita quasi ovunque, $g \in L^p(\Omega)$ e $g_n \to g$ in L^p. In particolare (f_n) sarà di Cauchy quasi ovunque, dunque $\exists f$ tale che $f_n \to f$ quasi ovunque. Infine $|f_n| \le |g| + |f_1| \in L^p$, dunque concludiamo per Lebesgue. □

La seguente proposizione è importante per il concetto di dualità:

Proposizione 4.1.3. *Dato $1 \le p \le \infty$, allora $\forall g \in L^{p'}(\Omega)$ è ben definito il funzionale*

$$T_g : L^p(\Omega) \to \mathbb{R} \quad | \quad T_g(f) = \int_\Omega fg,$$

inoltre si tratta di un operatore lineare continuo (quindi un elemento del duale).

Dimostrazione. Immediato con Hölder. □

Teorema 4.1.4 (rappresentazione di Riesz-Fréchet)**.** *Se $1 \le p < \infty$ allora il duale di $L^p(\Omega)$ è isometricamente isomorfo a $L^{p'}(\Omega)$, tramite la mappa*

$$\varphi : L^{p'}(\Omega) \to L^p(\Omega)^* \quad | \quad g \mapsto T_g,$$

dove T_g è definito come nella Proposizione 4.1.3.

Osservazione 4.1.5. Il duale di $L^\infty(\Omega)$ non è $L^1(\Omega)$, tuttavia la mappa $\varphi : L^1(\Omega) \to L^\infty(\Omega)^*$ è un'immersione lineare isometrica.

Corollario 4.1.6 (riflessività)**.** *Se $1 < p < \infty$ allora $L^p(\Omega)$ è uno spazio riflessivo.*

Dimostrazione. Si verifica che, se $\phi : L^p(\Omega) \to L^{p'}(\Omega)$ e $\psi : L^{p'}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ sono gli isomorfismi dati dal teorema di rappresentazione di Riesz-Fréchet, e $J : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)^{**}$ è l'immersione naturale nel biduale, allora $\forall f \in L^p(\Omega)$ $Jf = \phi(f) \circ \psi^{-1}$. In particolare, se $\xi \in L^p(\Omega)^{**}$, allora $Jf = \xi$ è equivalente a $f = \phi^{-1}(\xi \circ \psi)$, dunque J è surgettiva. □

4.2 Supporto di funzioni L^p

La definizione di supporto solita per funzioni $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ (cioè $\operatorname{supp} f = \overline{[f \neq 0]}$) ha il difetto di dipendere fortemente dalla scelta del rappresentante in L^p (per esempio $\chi_\mathbb{Q}$ e 0 si identificano in $L^p(\mathbb{R})$, tuttavia $\operatorname{supp} \chi_\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ e $\operatorname{supp} 0 = \emptyset$). Procediamo a dare una diversa definizione:

Proposizione 4.2.1. *Sia $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e si consideri la famiglia*

$$\{\omega_i\}_{i \in I} = \{\omega_i \subseteq \mathbb{R}^N \mid \omega_i \text{ è aperto e } f = 0 \text{ q.o. su } \omega_i\}.$$

Sia $\omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$: allora $f = 0$ quasi ovunque su ω; in altri termini, ω è il più grande aperto dove f si annulla quasi ovunque.

Dimostrazione. Se I fosse numerabile avremmo finito; tuttavia $\mathbb{R}^N$ ammette una base numerabile di aperti (α_n), dunque ciascun ω_i è unione di elementi della base e di conseguenza anche ω. □

Definizione 4.2.2. Il supporto di una funzione definita quasi ovunque sarà $\operatorname{supp} f = \mathbb{R}^N \setminus \omega$, secondo la notazione della precedente proposizione.

4.3 Convoluzione in $\mathbb{R}^N$

Possiamo definire il prodotto di convoluzione su $\mathbb{R}^N$ grazie al seguente teorema:

Teorema 4.3.1 (Young)**.** *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p \leq \infty$. Allora per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$ la funzione $y \mapsto f(x-y)g(y)$ è integrabile su $\mathbb{R}^N$ e il prodotto di convoluzione*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\, dy$$

è ben definito. Inoltre $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}$.

Dimostrazione. Separiamo i casi $p = \infty$, $p = 1$ e $1 < p < \infty$.

($p = \infty$) Basta osservare che

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|\, dy \leq \|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\, dy = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^\infty}.$$

($p = 1$) Si osserva facilmente che valgono

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|\, dx \leq \|f\|_{L^1}|g(y)|$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|\, dx \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1},$$

da cui basta applicare Fubini-Tonelli.

($1 < p < \infty$) Osserviamo che $|g|^p \in L^1(\mathbb{R}^N)$, da cui per il punto precedente $|f| * |g|^p$ è ben definito quasi ovunque su $\mathbb{R}^N$ e $\||f| * |g|^p\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|^p_{L^p}$. In particolare con Hölder

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|\, dy &= \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^{\frac{1}{p'}} \left(|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|\right) dy \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| dy\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)||g(y)|^p\, dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{p'}} \left(|f| * |g|^p(x)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,
\end{aligned}$$

e inoltre

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_{L^p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} dx \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\, dy\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f| * |g|^p(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{p'}} \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} \|g\|_{L^p} = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

□

Proposizione 4.3.2. *Il prodotto di convoluzione soddisfa le seguenti proprietà:*

(i) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, allora $g * f = f * g$ (in particolare anche $g * f$ ha senso);

(ii) Se f, g, h sono tali che $f * g$ e $g * h$ abbiano significato, allora $(f * g) * h = f * (g * h)$;

(iii) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f * g) \cdot h = \int_{\mathbb{R}^N} (\breve{f} * h) \cdot g,$$

dove $\breve{f}(x) = f(-x)$;

Dimostrazione.

(i) Cambio di variabili nell'integrale;

(ii) Commutatività, Fubini-Tonelli e Young;

(iii) Fubini-Tonelli e Young. □

La convoluzione si comporta bene rispetto al supporto:

Proposizione 4.3.3. *Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$: allora $\operatorname{supp}(f * g) \subseteq \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}$; in particolare se f, g hanno supporto compatto allora anche $f * g$ avrà supporto compatto.*

Dimostrazione. Se $x \in \mathbb{R}^N$ e $E = (x + \operatorname{supp} g) \cap \operatorname{supp} f$ allora $(f * g)(x) = \int_E f(x-y)g(y)\,dy$, inoltre si osserva che se $x \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$ allora $(x - \operatorname{supp} f) \cap \operatorname{supp} g = \emptyset$; in particolare $f * g = 0$ su $(\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g)^c$. Passando alla parte interna e poi al complementare, si ottiene la tesi. □

Se una delle funzioni convolute è continua a supporto compatto, possiamo indebolire le ipotesi e ottenere un risultato di regolarità:

Proposizione 4.3.4. *Siano $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Allora $f * g$ è ben definita e continua.*

Dimostrazione. La buona definizione è immediata osservando che $C_c(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Per dimostrare la continuità è sufficiente mostrarla sulle successioni, cioè che se $(x_n) \subset \mathbb{R}^N$ e $x_n \to x$ allora $f * g(x_n) \to f * g(x)$. Impostando si ottiene:

$$|(f * g)(x_n) - (f * g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x_n - y) - f(x - y)||g(y)|\,dy.$$

Dato che $\{\|x_n\|\}$ è limitato e $\operatorname{supp} f$ è compatto, si può trovare un compatto K tale che $f(x_n - y)$ e $f(x - y)$ si annullano per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $y \notin K$. Inoltre f è uniformemente continua, quindi troviamo $(\varepsilon_n) \subset \mathbb{R}^+$ con $\varepsilon_n \to 0$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f(x_n - y) - f(x - y)| < \varepsilon_n$ ovunque su $\mathbb{R}^N$, dunque

$$|(f * g)(x_n) - (f * g)(x)| \leq \varepsilon_n \int_K |g(y)|\,dy = \varepsilon_n \|g\|_{L^1(K)} \to 0.$$ □

Teorema 4.3.5. *Siano $f \in C^k_c(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Allora $f * g \in \mathbb{C}^k(\mathbb{R}^N)$ e $\forall \alpha \in \mathbb{N}^N$ con $|\alpha| \leq k$ si ha $D^\alpha(f * g) = D^\alpha f * g$.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare il caso $k = 1$: gli altri si ottengono per induzione. Vogliamo mostrare che $(f * g)(x + h) - (f * g)(x) - h \cdot (\nabla f * g)(x) = o(|h|)$, dove $x \in \mathbb{R}^N$ è fissato e h varia in $B(0, 1)$. Impostare i conti ci porta a

$$\begin{aligned} &|(f * g)(x + h) - (f * g)(x) - h \cdot (\nabla f * g)(x)| \\ &\quad \leq \int_K |f(x - y + h) - f(x - y) - h \cdot \nabla f(x - y)||g(y)|\,dy \end{aligned}$$

dove K è un opportuno compatto (si sfrutta la compattezza di $\operatorname{supp} f$ e $\overline{B(0,1)}$). Si può concludere sfruttando l'uniforme continuità di ∇f, ma va formalizzato:

$$\begin{aligned}
&|f(x-y+h) - f(x-y) - h \cdot \nabla f(x-y)| \\
&\quad = \left| \int_0^1 h \cdot \nabla f(x-y+sh)\, ds - h \cdot \nabla f(x-y) \right| \\
&\quad \le |h| \sup_{s \in [0,1]} |\nabla f(x-y+sh) - \nabla f(x-y)| \le |h| \varepsilon_{|h|}
\end{aligned}$$

dove $\varepsilon_{|h|} \to 0$ per $|h| \to 0$. □

Corollario 4.3.6. *Se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, allora $f * g \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$.*

4.3.1 Mollificatori

I risultati precedenti ci suggeriscono di introdurre delle funzioni $\mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ con cui regolarizzare funzioni date.

Definizione 4.3.7. Una *successione di mollificatori* è una successione $(\rho_n) \subset \mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $\forall n \in \mathbb{N}$ valgono $\operatorname{supp} \rho \subseteq \overline{B(0,1)}$, $\rho_n \ge 0$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n = 1$.

Osservazione 4.3.8. Possiamo chiederci come si può costruire una successione di mollificatori: è sufficiente partire da una funzione $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $\operatorname{supp} \rho \subseteq \overline{B(0,1)}$, $\rho \ge 0$ e $C = \int \rho \ne 0$, e porre $\rho_n(x) = C^{-1} n^N \rho(nx)$. Una funzione con queste proprietà è per esempio

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2 - 1}} & \text{se } |x| < 1; \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia d'ora in poi (ρ_n) una successione di mollificatori.

Proposizione 4.3.9. *Se $f \in C(\mathbb{R}^N)$, allora $(\rho_n * f) \to f$ uniformemente su sottinsiemi compatti di $\mathbb{R}^N$.*

Dimostrazione. Sia $K \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ un compatto: facendo i conti

$$\forall x \in K \quad |(\rho_n * f)(x) - f(x)| \le \int_{B(0,1/n)} |f(x-y) - f(x)| \rho_n(y)\, dy.$$

Dato che f è uniformemente continua su $K + \overline{B(0,1)}$, deduciamo che

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \forall x \in K \;\; \forall y \in B(0,1/n) \quad |f(x-y) - f(x)| < \varepsilon_n,$$

dove ε_n non dipende da K e $\varepsilon_n \to 0$ per $n \to \infty$, e si conclude. □

Proposizione 4.3.10. *Se $1 \le p < \infty$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, allora $(\rho_n * f) \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$.*

Osservazione 4.3.11. Una conseguenza immediata di questa proposizione è che $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^N)$ per $1 \le p < \infty$.

Dimostrazione. Per $1 \leq p < \infty$ sappiamo che $\exists (f_m) \subset C_c(\mathbb{R}^N)$ successione tale che $f_m \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$. La tesi è banalmente verificata per gli f_m grazie alla proposizione precedente, dunque scriviamo, ricordando il teorema di Young:

$$\begin{aligned}
&\|(\rho_n * f) - f\|_{L^p} \\
&\qquad \leq \|\rho_n * (f - f_m)\|_{L^p} + \|\rho_n * f_m - f_m\|_{L^p} + \|f_m - f\|_{L^p} \\
&\qquad \leq \|\rho_n * f_m - f_m\|_{L^p} + 2\|f_m - f\|_{L^p}
\end{aligned}$$

che converge a 0 per $m, n \to \infty$. □

Vale il seguente importante corollario

Corollario 4.3.12. *Se $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ è un aperto, allora $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$.*

Dimostrazione. Sia $\bar{f}$ l'estensione di f in $\mathbb{R}^N$ nulla fuori da Ω. Si consideri (K_n) successione crescente di sottoinsiemi compatti di Ω tali che $\bigcup_{\mathbb{N}} K_n = \Omega$ e $K_n + \overline{B(0, 1/n)} \subset \Omega$. Siano $f_n = \rho_n * (\chi_{K_n} \bar{f})$: si verifica che il loro supporto è compatto in Ω e che $f_n \to f$ in $L^p(\Omega)$. □

4.3.2 Convoluzione in $\mathbb{T}^N$

Dato che il prodotto di convoluzione coinvolge delle traslazioni, non ha sempre senso fuori da spazi vettoriali. Tuttavia la maggior parte dei risultati funzionano (con opportune modifiche) su spazi misurabili invarianti per traslazioni, come il toro N-dimensionale $\mathbb{T}^N = [-\pi, \pi]^N / \sim$.

Nello specifico, valgono ancora tutti i risultati precedenti, senza che sia necessario chiedere la compattezza dei supporti o l'integrabilità locale (attenzione che è ancora necessario che i mollificatori abbiano supporto che converge a $\{0\}$).

Capitolo 5

Serie di Fourier

Proposizione 5.0.13. *Si consideri lo spazio di Hilbert reale $L^2(-\pi, \pi)$ dotato del prodotto scalare*

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} fg.$$

La famiglia numerabile di funzioni

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin(nx),\ \cos(nx) \ \mid \ n \geq 1 \right\}$$

è un sistema ortonormale.

Dimostrazione. Sono conti; torna comodo ricordare le formule di Werner e del $\cos(2\theta)$. □

Proposizione 5.0.14. *Si consideri lo spazio di Hilbert complesso $L^2(-\pi, \pi)$ dotato del prodotto scalare*

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g}.$$

La famiglia numerabile di funzioni $\{e^{ikx} \ \mid \ k \in \mathbb{Z}\}$ è un sistema ortonormale.

Dimostrazione. Conti. □

Osservazione 5.0.15. Verificheremo più avanti che questi sistemi ortonormali sono in realtà basi di Hilbert per $L^2(\mathbb{T})$.

Questo ci suggerisce di definire i seguenti sviluppi:

Definizione 5.0.16. Se $f \in L^2(-\pi, \pi)$ è una funzione reale, definiamo la sua serie di Fourier come limite di

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx),$$

dove

$$\begin{aligned} a_k &= (f, \cos(kx)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \cos(kx)\, dx, \\ b_k &= (f, \sin(kx)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f \sin(kx)\, dx \end{aligned}$$

sono i coefficienti di Fourier reali, nel senso della Proposizione 5.0.13. Se più in generale $f \in L^2(-\pi,\pi)$ è una funzione complessa, definiamo la sua serie di Fourier come limite di

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \qquad \text{dove } c_k = (f, e^{ikx}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f e^{-ikx}\,dx$$

sono i coefficienti di Fourier complessi, nel senso della Proposizione 5.0.14.

Osservazione 5.0.17. Per la buona definizione dei coefficienti di Fourier è sufficiente in realtà che $f \in L^1(-\pi,\pi)$. Si verifica che valgono $\forall k \geq 0 \;\; a_k = c_k + c_{-k}$ e $b_k = i(c_k - c_{-k})$, da cui si può provare che i polinomi di Fourier $S_n(x)$ del caso reale coincidono con quelli complessi.

Osservazione 5.0.18. Se $f \in L^1(\mathbb{T})$ è una funzione pari, si verifica che tutti i b_n si annullano; analogamente se f è dispari, tutti gli a_n si annullano.

Il seguente risultato sarà essenziale per alcune dimostrazioni:

Lemma 5.0.19 (Riemann-Lebesgue)**.** *Se $f \in L^1(a,b)$ con $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallo limitato, allora valgono le seguenti:*

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\pm\infty}\int_a^b f(x)e^{ikx}\,dx &= 0;\\
\lim_{k\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin(kx)\,dx &= 0;\\
\lim_{k\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(kx)\,dx &= 0.
\end{aligned}$$

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare la prima: le altre due seguono immediatamente. L'idea è dimostrarlo per $f \in C^1(a,b)$ ed estenderlo a $L^1(a,b)$ per densità di C^1 in L^1. Se $f \in C^1(a,b)$, integrando per parti otteniamo

$$\left|\int_a^b f(x)e^{ikx}\,dx\right| = \frac{1}{k}\left(\left[f(x)e^{ikx}\right]_a^b - \int_a^b f'(x)e^{ikx}\,dx\right) \leq \frac{1}{k}\left(2\|f\|_{L^\infty} + (b-a)\|f'\|_{L^\infty}\right) \to 0.$$

Sia ora $f \in L^1(a,b)$ e $(f_n) \subset C^1(a,b)$ tale che $f_n \to f$ in L^1: sarà soddisfatto

$$\left|\int_a^b f(x)e^{ikx}\,dx\right| \leq \|f - f_n\|_{L^1} + \left|\int_a^b f_n(x)e^{ikx}\,dx\right| \longrightarrow 0$$

per $n \to \infty$, $k \to \pm\infty$. □

Osservazione 5.0.20. Il lemma di Riemann-Lebesgue implica in particolare che per $f \in L^1(\mathbb{T})$ non solo i coefficienti di Fourier sono ben definiti, ma formano delle successioni infinitesime. Questo non è sufficiente a darci alcuna garanzia di convergenza puntuale, per la quale vorremmo avere piuttosto $\sum |c_k| < \infty$.

Proposizione 5.0.21. *Sia $\phi_1 : L^1(\mathbb{T}) \to c_0$ l'operatore che manda una funzione f nei suoi coefficienti di Fourier complessi $(\hat{f}_k)$. Allora ϕ_1 è un operatore lineare continuo e $\|\phi_1\| = \frac{1}{2\pi}$.*

Dimostrazione. La buona definizione deriva dall'osservazione precedente, è ovviamente un operatore lineare e si verifica immediatamente che

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad |\hat{f}_k| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x)|\,dx \quad \Rightarrow \quad \|\phi_1\| \leq \frac{1}{2\pi}$$

passando al sup; per concludere è sufficiente notare che $\|\phi_1(1)\| = \frac{1}{2\pi}$. □

5.1 Nucleo di Dirichlet

Definizione 5.1.1. Per ogni $n \geq 0$ definiamo il *nucleo di Dirichlet*

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)\right).$$

Proposizione 5.1.2. *Il nucleo di Dirichlet soddisfa le seguenti proprietà:*

(i) Appartiene a $C^\infty(\mathbb{T})$ ed è pari;

(ii) Si può scrivere equivalentemente:

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)}{2\pi\sin\left(\frac{x}{2}\right)};$$

(iii) $D_n(0) = \frac{1}{2\pi}(2n+1)$;

(iv) $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = 1$, tuttavia $\|D_n\|_{L^1(-\pi,\pi)} \to \infty$ asintoticamente come $\log n$ per $n \to \infty$.

Dimostrazione.

(i) Ovvio.

(ii) La scrittura come somma di esponenziali complessi è immediata. Per ricondurci alla frazione con i seni, si applica l'identità delle progressioni geometriche.

(iii) Evidente da qualsiasi scrittura.

(iv) L'integrale $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\,dx = 1$ è immediato con la scrittura in somma di esponenziali. Trasliamo ora l'integrale per periodicità e sommiamo separatamente gli integrali sui periodi di $|\sin(\frac{2n+1}{2}x)|$:

$$\begin{aligned}
\|D_n\|_{L^1(-\pi,\pi)} &= \int_0^{2\pi} \left|\frac{\sin(\frac{2n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}\right| dx \\
&\geq 2\sum_{k=0}^{2n} \int_{\frac{2\pi k}{2n+1}}^{\frac{2\pi(k+1)}{2n+1}} \frac{|\sin(\frac{2n+1}{2}x)|}{x}\,dx \\
&\geq \frac{2n+1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1}\int_0^{\frac{2\pi}{2n+1}} \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) dx \\
&= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k} \quad \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

□

C'è un legame importante tra il nucleo di Dirichlet e la serie di Fourier di una funzione f:

Proposizione 5.1.3. *Se $f \in L^1(\mathbb{T})$, allora $\forall n \geq 0$ vale*

$$S_n(x) = (f * D_n)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt.$$

Dimostrazione. Un conto immediato con la serie complessa porta a

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t)\, dt = (f * D_n)(x).$$

Con un opportuno cambio di variabili si trova la scrittura alternativa della tesi. □

Sfruttiamo questa scrittura per dimostrare un primo risultato di convergenza:

Teorema 5.1.4 (test di Dini). *Sia $f \in C^0(\mathbb{T})$ e supponiamo che f soddisfi la* condizione di Dini *in $x_0 \in \mathbb{T}$, cioè*

$$\exists \delta > 0 \text{ tale che } \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{f(x_0+z) - f(x_0)}{z} \right| dz < \infty.$$

Allora $S_n(x_0) \to f(x_0)$.

Dimostrazione. Dato che $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z)\, dz = 1$, possiamo scrivere

$$|S_n(x_0) - f(x_0)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x_0+z) - f(x_0)) D_n(z)\, dz \right|.$$

Spezziamo l'integrale negli intervalli $[-\pi,-\delta]$, $[-\delta,\delta]$ e $[\delta,\pi]$:

- In $[\delta,\pi]$ il $\sin(\frac{z}{2})$ non si annulla e quindi

  $$\int_{\delta}^{\pi} (f(x_0+z) - f(x_0)) D_n(z)\, dz = \int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x_0+z) - f(x_0)}{2\pi \sin(\frac{z}{2})} \sin\left(\frac{2n+1}{2} z\right) dz \longrightarrow 0$$

  per $n \to \infty$ con Riemann-Lebesgue. Analogamente $\int_{-\pi}^{-\delta} (\ldots) \to 0$.
- In $[-\delta,\delta]$ abbiamo problemi in 0 da sistemare:

  $$\int_{\delta}^{\delta} (f(x_0+z) - f(x_0)) D_n(z)\, dz = \int_{\delta}^{\delta} \frac{f(x_0+z) - f(x_0)}{z} \frac{z}{2\pi \sin(\frac{z}{2})} \sin\left(\frac{2n+1}{2} z\right) dz.$$

  La funzione

  $$g_{x_0}(z) = \frac{f(x_0+z) - f(x_0)}{z} \frac{z}{2\pi \sin(\frac{z}{2})}$$

  è limitata q.o. in $[-\delta,\delta]$, quindi posso applicare ancora Riemann-Lebesgue e concludere. □

Osservazione 5.1.5. Se $f \in C^0(\mathbb{T})$, sia $\omega_f(z,x) = \max_{|\varepsilon| \le z} |f(x+\varepsilon) - f(x)|$ il *modulo di continuità locale*. Si osserva facilmente che se vale per qualche $\delta > 0$

$$\int_0^{\delta} \frac{\omega_f(z,x)}{z}\, dz < \infty$$

allora la condizione di Dini è soddisfatta in x. Se inoltre $\omega_f(z) = \max_{x \in \mathbb{T}} \omega_f(z,x)$ è il *modulo di continuità globale*, una condizione sufficiente per soddisfare la condizione di Dini su ogni punto (e quindi avere $S_n \to f$ puntualmente) è che per qualche $\delta > 0$ valga

$$\int_0^{\delta} \frac{\omega_f(z)}{z}\, dz < \infty;$$

in tal caso f sarà detta *Dini-continua*.

Osservazione 5.1.6. Si verifica facilmente che le $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$ con $\alpha \in]0,1]$ sono Dini-continue, in particolare soddisfano $S_n \to f$ puntualmente.

Esempio 5.1.7. Un esempio di funzione Dini-continua ma non Hölderiana su $\mathbb{T}$ è

$$f(x) = \begin{cases} \log(\gamma|x|)^{-2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

con $\gamma > 0$ sufficientemente piccolo. Si verifica infatti che in tal caso su $[0,\pi]$ sono soddisfatte $f, f' \geq 0$ e $f'' \leq 0$, da cui

$$0 \leq x < y \leq x + t \leq \pi \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| = \int_0^t f'(x+s)\, ds \leq \int_0^t f'(s)\, ds = f(t)$$

e quindi

$$\int_0^\pi \frac{\omega_f(t)}{t}\, dt \leq \int_0^\pi \frac{dt}{t\log(\gamma t)^2} = \left[-\frac{1}{\log(\gamma t)}\right]_0^\pi = \frac{1}{-\log(\gamma\pi)} < \infty.$$

D'altra parte, se fosse $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{T})$ per qualche $\alpha \in]0,1]$, allora per qualche $c > 0$ varrebbe

$$\forall x \in [0,\pi] \qquad \frac{1}{x^\alpha \log(\gamma x)^2} \leq c$$

che è assurdo perché il LHS diverge per $x \to 0$.

Mostriamo adesso un risultato analogo ma più generale per le funzioni C^1 a tratti:

Teorema 5.1.8. *Sia $f \in C^1_{\mathrm{tr}}(\mathbb{T})$, siano per ogni $x \in \mathbb{T}$ definiti i limiti sinistro e destro*

$$f_-(x) = \lim_{y \to x^-} f(x), \qquad f_+(x) = \lim_{y \to x^+} f(x).$$

Allora $\forall x \in \mathbb{T}$ si ha $S_n(x) \to \dfrac{f_-(x) + f_+(x)}{2}$.

Dimostrazione. Ricordando che $D_n(x)$ è pari, spezziamo l'integrale:

$$S_n(x) - \frac{f_-(x) + f_+(x)}{2} = \int_{-\pi}^0 (f(x+z) - f_-(x))D_n(z)\, dz + \int_0^\pi (f(x+z) - f_+(x))D_n(z)\, dz.$$

Si procede come nella dimostrazione del teorema precedente. □

5.2 Teorema di Fejer

Definizione 5.2.1. Per ogni $n \geq 0$ definiamo il *nucleo di Fejer* come media di nuclei di Dirichlet:

$$\phi_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x).$$

Proposizione 5.2.2. *Il nucleo di Fejer soddisfa le seguenti proprietà:*

(i) $\phi_n \in C^\infty(\mathbb{T})$ *ed è pari;*

(ii) Si può scrivere equivalentemente

$$\phi_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} (n - |k|)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin(\frac{n}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})} \right)^2$$

(iii) Soddisfa $\phi_n \geq 0$ su $\mathbb{T}$;

(iv) $\phi_n(0) = \frac{n}{2\pi}$;

(v) Soddisfa $\|\phi_n\|_{L^1(\mathbb{T})} = \int_{\mathbb{T}} \phi_n = 1$;

(vi) Per ogni $\delta > 0$ si ha $\int_\delta^\pi \phi_n(z)\,dz \to 0$ per $n \to \infty$.

Dimostrazione.

(i) Evidente in quanto combinazione di nuclei di Dirichlet;

(ii) Conti;

(iii) Evidente dalla scrittura con i seni;

(iv) Evidente da qualunque scrittura;

(v) Evidente dalla non-negatività e dalla scrittura come media di nuclei di Dirichlet.

(vi) Si verifica $\sin(z) \geq \frac{2}{\pi}z$ su $[0, \frac{\pi}{2}]$, da cui

$$\left| \frac{\sin\frac{nz}{2}}{\sin\frac{z}{2}} \right| \leq \frac{\pi}{2\delta} \quad \text{su } [\delta, \pi] \quad \Rightarrow \quad \int_\delta^\pi \phi_n(z)\,dz \leq \frac{\pi^2}{8\delta^2 n}$$ □

Vediamo adesso un risultato di densità che ci consentirà di dire di più sulla convergenza delle serie di Fourier:

Teorema 5.2.3 (Fejer)**.** *Sia $f \in C^0(\mathbb{T})$ e siano*

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + \ldots + S_{n-1}(x)}{n}.$$

Allora $\sigma_n \to f$ uniformemente. In particolare i polinomi trigonometrici sono densi in $C^0(\mathbb{T})$.

Dimostrazione. Si osserva subito che $\sigma_n(x) = (f * \phi_n)(x)$, da cui

$$|\sigma_n(x) - f(x)| = \left| \int_{\mathbb{T}} (f(x+z) - f(x))\phi_n(z)\,dz \right| \leq \int_{\mathbb{T}} |f(x+z) - f(x)|\phi_n(z)\,dz$$

poiché $\phi_n \geq 0$ (a differenza di D_n). Spezziamo anche in questo caso gli integrali negli intervalli $[-\pi, -\delta]$, $[-\delta, \delta]$ e $[\delta, \pi]$, con $\delta > 0$ opportuno:

- Se $\omega_f(t)$ è il modulo di continuità globale (che esiste e ha limite nullo in 0 perché f è uniformemente continua su $\mathbb{T}$), si verifica

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x+z) - f(x)|\phi_n(z)\,dz \leq \omega_f(2\delta)$$

- Per la proposizione precedente

$$\int_{\delta}^{\pi} |f(x+z) - f(x)|\phi_n(z)\, dz \leq 2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \int_{\delta}^{\pi} \phi_n(z)\, dz \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \frac{\pi^2}{4\delta^2 n};$$

  per parità di ϕ_n varrà la stessa stima su $[-\pi, -\delta]$.

Ne consegue che per scelte opportune δ e n si ha $|\sigma_n(x) - f(x)| \to 0$, in modo indipendente dalla scelta di $x \in \mathbb{T}$. $\square$

Vediamo un primo corollario:

Corollario 5.2.4. *I polinomi trigonometrici sono densi in $L^p(\mathbb{T})$ per $1 \leq p < \infty$.*

Dimostrazione. L'immersione $L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$ è continua, dunque possiamo combinare il teorema di Fejer e la densità di $C(\mathbb{T})$ in $L^p(\mathbb{T})$ per ottenere la tesi. $\square$

Vediamo adesso come si applica questo risultato alle serie di Fourier:

Corollario 5.2.5. *Se $f \in L^2(\mathbb{T})$ allora $S_n \to f$ in $L^2(\mathbb{T})$.*

Dimostrazione. Per la disuguaglianza di Bessel i polinomi di Fourier sono i polinomi trigonometrici che danno la miglior approssimazione di f in $L^2(\mathbb{T})$, dunque $S_n \to f$ per densità. $\square$

Osservazione 5.2.6. Questo implica che i sistemi ortonormali con cui abbiamo definito i coefficienti di Fourier sono basi ortonormali, dunque varranno le identità di Parseval:

$$\forall f \in L^2(\mathbb{T}) \qquad 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \pi \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \|f\|_{L^2}^2$$

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{T}) \qquad 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\overline{c_k(g)} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(f)\overline{a_n(g)} + b_n(f)\overline{b_n(g)}) = (f, g)$$

Esempio 5.2.7. Si possono sfruttare le identità di Parseval per determinare alcune serie notevoli. Sia per esempio $f(x) = x \in L^2(\mathbb{T})$: essendo dispari, la sua serie di Fourier ammetterà solo i coefficienti nei seni:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\cos(nt)\, dt = 0,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\, dt = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Con l'identità di Parseval:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \|x\|_{L^2}^2 = \frac{2}{3}\pi^3 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Osservazione 5.2.8. In particolare, se $f \in L^2(\mathbb{T})$ allora (S_n) ammetterà una sottosuccessione tale che $S_{k_n} \to f$ quasi ovunque. In realtà si hanno dei risultati più precisi, che non dimostreremo:

- Esempio di Kolmogorov: $\exists f \in L^1(\mathbb{T})$ tale che S_n diverge ovunque su $\mathbb{T}$;
- Teorema di Carleson: se $1 < p < \infty$ e $f \in L^p(\mathbb{T})$, allora $S_n \to f$ quasi ovunque.

Proposizione 5.2.9. *Sia $\phi_2 : L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2$ l'operatore che manda una funzione f nella successione dei suoi coefficienti di Fourier $(\hat{f}_k)$. Allora ϕ_2 è un isomorfismo $\frac{1}{2\pi}$-isometrico.*

Dimostrazione. È la Proposizione 3.1.18. Attenzione al riscalamento dei coefficienti! $\square$

5.3 Coefficienti di Fourier e regolarità

Proposizione 5.3.1. *Se $f \in C^1(\mathbb{T})$, allora $S_n(f') = S_n'(f)$, cioè i coefficienti di Fourier della derivata soddisfano le relazioni:*

$$c_k(f') = ikc_k(f), \qquad a_n(f') = -nb_n(f), \qquad b_n(f') = na_n(f).$$

In particolare i coefficienti di Fourier convergono velocemente:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 c_k^2 = \|f'\|_{L^2}^2 < \infty \text{ e analoghi.}$$

Dimostrazione. Fare i conti integrando per parti. $\square$

Osservazione 5.3.2. Si può generalizzare facilmente per induzione a $C^m(\mathbb{T})$, ottenendo

$$c_k^{(m)} = c_k(f^{(m)}) = (ik)^m c_k, \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^{2m} c_k^2 = \|f^{(m)}\|_{L^2}^2 < \infty.$$

Teorema 5.3.3. *Se $f \in C^1(\mathbb{T})$, allora $S_n \to f$ uniformemente.*

Dimostrazione. Osserviamo che

$$|S_n(x)| \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| \le |c_0| + \sum_{k\neq 0} \frac{|c_k'|}{|k|} = |c_0| + \left(\sum_{k\neq 0} |c_k'|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k\neq 0} \frac{1}{|k|^2}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

dove $c_k' = c_k(f')$. Si ha convergenza totale, quindi $S_n \to u$ uniformemente per qualche $u \in C(\mathbb{T})$. Tuttavia $S_n \to f$ in L^2, che a sua volta implica $S_{k_n} \to f$ quasi ovunque passando ad un'opportuna sottosuccessione. Dato che u e f sono continue, i due limiti devono coincidere. $\square$

Definizione 5.3.4. Può tornare utile definire il seguente spazio di Sobolev:

$$H^m_{\mathrm{per}}(-\pi, \pi) = \left\{ f \in L^2 \;\middle|\; \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^{2m} |c_k|^2 < \infty \right\}.$$

Osservazione 5.3.5. In realtà si possono indebolire le ipotesi: è sufficiente che $f \in C^0(\mathbb{T}) \cap H^1_{\mathrm{per}}$ per avere convergenza uniforme. Generalizzando, se $f \in C^0(\mathbb{T}) \cap H^m_{\mathrm{per}}$ si avrà

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^\alpha |c_k| < \infty \qquad \forall \alpha \in [0, m - \tfrac{1}{2}[.$$

Enunciamo il seguente teorema senza dimostrarlo:

Teorema 5.3.6. *Se $f \in L^2(\mathbb{T})$ e $\sum |k|^\alpha |c_k| < \infty$, allora f ammette un rappresentante in $C^\alpha(\mathbb{T})$. In particolare questo è soddisfatto se $f \in H^m_{\text{per}}$ per qualche $m > \alpha + \frac{1}{2}$.*

Senza ipotesi di regolarità si può avere convergenza puntuale arbitrariamente lenta:

Proposizione 5.3.7. *Sia $(\delta_n) \subset \mathbb{R}^+$ una successione decrescente tale che $\delta_n \to 0$: allora $\exists f \in C^0(\mathbb{T})$ tale che $|S_n(0) - f(0)| \geq \delta_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Si ponga $c_k = 0$ per i $k < 0$, $c_0 = \delta_0$ e $c_k = \delta_{k-1} - \delta_k$ per i $k > 0$. Si verifica che $\sum_{\mathbb{Z}} |c_k| < \infty$, dunque possiamo definire

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \quad \to \quad f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \in C^0(\mathbb{T})$$

ed è tutto ben definito. Si verifica immediatamente che

$$|S_n(0) - f(0)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (\delta_{k-1} - \delta_k) \right| = \delta_n. \qquad \square$$

5.4 Trasformata di Hilbert

Definizione 5.4.1. Definiamo l'operatore *trasformata di Hilbert*:

$$H : L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}) \quad | \quad Hf(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-i \operatorname{sgn}(k) \hat{f}_n) e^{int},$$

dove sgn è l'operatore di segno, con $\operatorname{sgn}(0) = 0$.

Proposizione 5.4.2. *La trasformata di Hilbert è un'isometria lineare.*

Dimostrazione. Ricordando l'identità di Parseval:

$$\|Hf\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = 2\pi \sum_{k \neq 0} |\hat{f}_n|^2 \leq 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}_n|^2 = \|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})}.$$

Scegliendo f tale che $\hat{f}_0 = 0$ otteniamo l'uguaglianza. $\square$

Proposizione 5.4.3. *Sulle funzioni a media nulla $H^2 = -\operatorname{Id}$. Inoltre $H^* = -H$.*

Dimostrazione. Con conti facili $H^2 f(t) = -\sum_{k \neq 0} \hat{f}_k e^{ikt}$. Per l'aggiunto basta impostare

$$(f, Hg) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k \overline{\widehat{Hg}_k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k i \operatorname{sgn}(k) \overline{\hat{g}_n} = (-Hf, g). \qquad \square$$

Proposizione 5.4.4. *Sia $f \in C^1_{\text{tr}}(\mathbb{T})$: allora*

$$Hf(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < |s| < \pi} f(t-s) \cot \frac{s}{2} \, ds.$$

Osservazione 5.4.5. Non possiamo a priori convolvere su $\mathbb{T}$ in quanto $\cot x \notin L^1(\mathbb{T})$ (in 0 si comporta come $\frac{1}{x}$), tuttavia è lecito integrare su $\mathbb{T} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]$ e passare al limite per $\varepsilon \to 0$, grazie alla disparità di $\cot x$. Questi integrali sono noti come *valori principali di Cauchy*.

Dimostrazione. Limitiamoci prima a considerare le somme parziali

$$H_n f(t) = \sum_{k=-n}^{n} (-i \operatorname{sgn}(k) \hat{f}_k) e^{ikt},$$

dato che a meno di passare a sottosuccessioni $H_n f \to Hf$ quasi ovunque su $\mathbb{T}$. Si verifica con le solite progressioni geometriche che

$$\sum_{k=-n}^{n} -i \operatorname{sgn}(k) e^{iks} = \frac{\cos \frac{s}{2} - \cos\left(\frac{2n+1}{2} s\right)}{\sin \frac{s}{2}} =: \varphi_n(s),$$

da cui si ricava

$$H_n f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) \varphi_n(s)\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (f(t-s) - f(t+s)) \varphi_n(s)\, ds$$

per disparità di φ_n. Adesso ha senso spezzare l'integrale in quanto

$$\frac{f(t-s) - f(t+s)}{\sin \frac{s}{2}} = \frac{f(t-s) - f(t+s)}{s} \cdot \frac{s}{\sin \frac{s}{2}}$$

viene controllato da $f'(t)$. Il termine con $\cos(\frac{2n+1}{2} s)$ tende a zero con Riemann-Lebesgue, l'altro lo approssimiamo integrando in $[\varepsilon, \pi]$: in questo modo si può riportare nella forma originale tramite disparità:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\pi} (f(t-s) - f(t+s)) \cot \frac{s}{2}\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon<|s|<\pi} f(t-s) \cot \frac{s}{2}\, ds.$$

Formalizzando le varie approssimazioni otteniamo la convergenza cercata. □

5.5 Miscellanea

Proposizione 5.5.1. *Se $f \in L^1(\mathbb{T})$ è a valori reali, allora $c_{-k} = \bar{c}_k$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.*

Dimostrazione. Facile conto. □

Proposizione 5.5.2. *Se $f, g \in L^2(\mathbb{T})$ allora $fg \in L^1(\mathbb{T})$, inoltre*

$$c_k(fg) = \sum_{l+m=k} c_l(f) c_m(g) e^{i(l+m)x}.$$

Dimostrazione. La prima parte è ovvia per Hölder. La seconda parte saranno conti osceni (da fare). □

Proposizione 5.5.3. *Se $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ allora $f * g \in L^1(\mathbb{T})$, inoltre $\widehat{f * g}_k = \hat{f}_k \hat{g}_k$.*

Dimostrazione. Conti e Young. □

Questo porta alla seguente osservazione:
Osservazione 5.5.4. La convoluzione su $L^2(\mathbb{T})$ non ammette elemento neutro. Infatti se $f * g = f$ per ogni $f \in L^2(\mathbb{T})$, si avrebbe $\hat{f}_k \hat{g}_k = \hat{f}_k$ da cui $\forall k \in \mathbb{Z}$ $\hat{g}_k = 1$, che è in contraddizione con $g \in L^2(\mathbb{T})$.X

5.5.1 Serie di Fourier in più dimensioni

Le serie di Fourier si possono definire anche per funzioni su $\mathbb{T}^N$, con risultati analoghi. In particolare, se $f \in L^1(\mathbb{T}^N)$, definiremo

$$\begin{aligned} &\forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N \qquad \hat{f}_{\mathbf{k}} = c_{\mathbf{k}}(f) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, d\mathbf{x}, \\ &\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{k}|\leq n} \hat{f}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

dove per $|\mathbf{k}|$ si intende in genere la norma-∞, ma pare vada bene qualunque norma su $\mathbb{R}^N$.

Possiamo definire le serie di Fourier anche per funzioni $f : \mathbb{T}^N \to \mathbb{R}^M$: basta spezzare componente per componente $f_j : T^N \to \mathbb{R}$ e considerare M serie di Fourier del tipo $\mathbb{T}^N \to \mathbb{R}$.

5.5.2 Fenomeno di Gibbs

Si consideri la funzione $f = \chi_{]-\pi,\pi[} \in C^1_{\mathrm{tr}}(\mathbb{T})$: la sua serie di Fourier convergerà puntualmente a f, ma avendo dei punti di discontinuità ci chiediamo come si comporteranno le serie troncate (che sono necessariamente $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{T})$). Facili conti portano a:

$$S_n(x) = 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{\sin(kx)}{k}.$$

Osservando che $\sin(k\pi - \alpha) = (-1)^{k+1}\sin(\alpha)$ e che $\sin(\alpha) \geq 0$ in $[0, \pi]$, ci viene in mente di valutare S_n in $\pi - \frac{\pi}{n}$:

$$S_n\left(\pi - \frac{\pi}{n}\right) = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(\frac{k}{n}\pi)}{k} = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin(\frac{k}{n}\pi)}{\frac{k}{n}\pi}.$$

Questa è la n-esima approssimazione dell'integrale di Riemann di $\frac{\sin x}{x}$, calcolato tra 0 e π, dunque convergerà a

$$2\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx \sim 3.70.$$

Quindi al crescere di $n \in \mathbb{N}$ le serie troncate presentano grosse oscillazioni vicino ai punti di discontinuità; questo fenomeno è noto come *fenomeno di Gibbs*.

Capitolo 6

Trasformata di Fourier

6.1 Trasformata di Fourier in L^1

Definizione 6.1.1. Data $f \in L^1(\mathbb{R})$, definiamo la sua *trasformata di Fourier* come

$$\mathfrak{F}(f) = \hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad | \quad \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-iyx}\, dx.$$

Nel caso in più dimensioni, se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ definiremo ancora

$$\mathfrak{F}(f) = \hat{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \quad | \quad \hat{f}(\vec{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\vec{\mathbf{x}}) e^{-i(\vec{\xi},\vec{\mathbf{x}})}\, d\vec{\mathbf{x}}.$$

Un'ulteriore estensione per $\mathbf{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ avviene componente per componente.

Proposizione 6.1.2. *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, allora $\hat{f} \in C_0$, inoltre $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.*

Dimostrazione.

- Per dimostrare che $\hat{f}$ è continua, osserviamo che

$$|\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)||e^{-ihx} - 1|\, dx,$$

  e si conclude con Lebesgue.

- Per dimostrare che $\lim_{\xi \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$ è sufficiente osservare che questo è verificato per $f \in C_c^1(\mathbb{R})$ (Riemann-Lebesgue), e si può estendere facilmente per densità.

- Infine è evidente che

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

  da cui si conclude che $\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ passando al sup. □

Corollario 6.1.3. $\mathfrak{F} : L^1(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ *è un operatore lineare e continuo di norma unitaria.*

Dimostrazione. La linearità è una verifica immediata, la continuità è data da $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^1}$. Per verificare che $\|\mathfrak{F}\| = 1$ è sufficiente osservare che $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$. □

Corollario 6.1.4. *Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R})$ è tale che $f_n \to f$ in L^1, allora $\hat{f}_n \to \hat{f}$ in L^∞.*

Dimostrazione. Immediato per linearità e continuità di $\mathfrak{F}$. □

Risulterà utile definire le seguenti applicazioni e studiarne la trasformata:

Proposizione 6.1.5. *Si definiscano gli operatori*

$$\begin{array}{lll} \forall h \in \mathbb{R} & \tau_h : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R}) & \tau_h f(x) = f(x+h) \\ \forall \delta \in \mathbb{R}^+ & \mathfrak{S}_\delta : L^1(\mathbb{R}) \to L^1(\mathbb{R}) & \mathfrak{S}_\delta f(x) = \dfrac{1}{\delta} f\left(\dfrac{x}{\delta}\right) \end{array}$$

Questi operatori sono degli isomorfismi isometrici; inoltre le loro trasformate di Fourier sono

$$\widehat{\tau_h f}(\xi) = e^{ih\xi}\hat{f}(\xi), \qquad \widehat{\mathfrak{S}_\delta f}(\xi) = \hat{f}(\delta\xi).$$

Dimostrazione. Conti e verifiche. □

Vediamo ora come si comporta la trasformata di Fourier rispetto alle derivate.

Proposizione 6.1.6. *Siano f, $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$: allora $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ e $\hat{f}'(\xi) = -i\widehat{xf}(\xi)$.*

Dimostrazione. Calcoliamo il rapporto incrementale supponendo di poter usare Lebesgue:

$$\frac{\hat{f}(\xi+h) - \hat{f}(\xi)}{h} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{e^{-i(\xi+h)x} - e^{-i\xi x}}{h}\,dx \longrightarrow -i\int_{\mathbb{R}} xf(x)e^{-i\xi x}\,dx = -i\widehat{xf}(\xi).$$

Per giustificare questi passaggi occorre osservare che

$$\left| f(x)\frac{e^{-i(\xi+h)x} - e^{-i\xi x}}{h} \right| = |xf(x)| \left| \frac{e^{-ihx} - 1}{-ihx} \right| \le |xf(x)|(1 + |o(h)|)$$

con i polinomi di Taylor. □

Proposizione 6.1.7. *Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ tale che $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$: allora $\widehat{f'}(\xi) = i\xi\hat{f}(\xi)$.*

Dimostrazione. Immediato integrando per parti, osservando che siamo nelle ipotesi della Proposizione 1.3.2. □

Similmente al caso delle serie di Fourier, anche la trasformata di Fourier della convoluzione è uguale al prodotto delle trasformate:

Proposizione 6.1.8. *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$: allora $\widehat{f * g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$.*

Dimostrazione. Facendo i conti:

$$\widehat{f * g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)e^{-i\xi(x-y)}e^{-i\xi y}\,dy\,dx.$$

Verificando le ipotesi di Fubini, si può scambiare l'ordine di integrazione e concludere. □

6.2 Trasformata inversa di Fourier

Osservazione 6.2.1. $f \in L^1(\mathbb{R})$ non è una condizione sufficiente per avere $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$: infatti si verifica che, se $f(x) = \chi_{[-1,1]}$, allora $\hat{f}(\xi) = 2\frac{\sin\xi}{\xi} \notin L^1(\mathbb{R})$.

Definizione 6.2.2. Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, definiamo la sua *trasformata di Fourier inversa* come

$$\mathfrak{F}^{-1}f = \check{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad | \quad \check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{ix\xi}\, d\xi.$$

Vediamo in che senso $\mathfrak{F}^{-1}$ è la trasformata inversa, partendo da alcuni casi particolari:

Proposizione 6.2.3. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ una funzione pari: allora $\hat{f} = \check{f}$.*

Dimostrazione. Immediato per cambio di variabili nell'integrale. □

Proposizione 6.2.4. *Sia $\rho(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ la gaussiana standard: allora $\hat{\rho}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$; in altre parole, ρ è un'autofunzione di autovalore $\sqrt{2\pi}$ dell'operatore $\mathfrak{F}$. Inoltre vale $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}f = 2\pi f$.*

Dimostrazione. Osserviamo che $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ e ρ è pari, quindi per la proposizione precedente l'ultima affermazione è una conseguenza immediata della prima; inoltre $\rho'(x) = -x\rho(x) \in L^1(\mathbb{R})$ e $\hat{\rho}(0) = \int_{\mathbb{R}} \rho = 1$. Sfruttando le relazioni tra trasformata e derivate otteniamo

$$\rho'(x) = -x\rho(x) \quad \Rightarrow \quad i\xi\hat{\rho}(\xi) = \widehat{\rho'}(\xi) = -\widehat{x\rho}(\xi) = -i\hat{\rho}'(\xi),$$

da cui, risolvendo l'equazione differenziale,

$$\hat{\rho}(\xi) = \hat{\rho}(0)e^{-\frac{\xi^2}{2}} = e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$ □

Siamo ora pronti per verificare un caso più generale:

Teorema 6.2.5 (inversione). *Se $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, allora $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}(f) = 2\pi f$.*

Dimostrazione. Definiamo prima di tutto gli spazi

$$X = \{f \in L^1(\mathbb{R}) \mid \hat{f} \in L^1(\mathbb{R})\}, \qquad Y = \{f \in X \mid \mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}(f) = 2\pi f\}.$$

- Si verifica facilmente che $Y < X < L^1(\mathbb{R})$ sono sottospazi vettoriali, invarianti rispetto agli operatori τ_h e $\mathfrak{S}_\delta$.
- Dimostriamo che se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in Y$, allora $f * g \in Y$. Come prima cosa

  $$\int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{f * g}(\xi)\right| d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)||\hat{g}(\xi)|\, d\xi \leq \|\hat{f}\|_{L^\infty}\|\hat{g}\|_{L^1} < \infty \quad \Rightarrow \quad f * g \in X.$$

  A questo punto si osserva che

  $$\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)e^{ix\xi}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(y)\hat{g}(\xi)e^{i(x-y)\xi}\, dy\, d\xi.$$

  Verificando le ipotesi di Fubini, scambiamo l'ordine di integrazione ottenendo

  $$(\dots) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\xi)e^{i(x-y)\xi}\, d\xi\, dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}g(x-y)\, dy = 2\pi(f * g)(x).$$

- Sia $f \in X$, $\rho \in Y$ la gaussiana standard, $\rho_\delta = \mathfrak{S}_\delta \rho \in Y$. Le gaussiane ρ_δ non sono proprio dei mollificatori (non hanno supporto compatto), ma ci assomigliano molto, quindi si può ancora verificare che $f * \rho_\delta \to f$ in L^1 per $\delta \to 0$. Si verifica inoltre $\widehat{f * \rho_\delta} \to \hat{f}$ in L^1 con Lebesgue (osservare che $\widehat{\rho_\delta}(\xi) = \sqrt{2\pi} \cdot \rho(\delta\xi)$), da cui $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}(f * \rho_\delta) \to \mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}(f)$ in L^∞. Tuttavia $\mathfrak{F}^{-1}\mathfrak{F}(f * \rho_\delta) = 2\pi(f * \rho_\delta) \to 2\pi f$ in L^1, e i limiti in L^1 e L^∞ devono coincidere quasi ovunque (basta passare a sottosuccessioni convergenti quasi ovunque). $\square$

Corollario 6.2.6. *Siano $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$ tali che $\hat{f}_1 = \hat{f}_2$: allora $f_1 = f_2$.*

Dimostrazione. Porre $f = f_1 - f_2$ e osservare che $\hat{f} = 0 \in L^1(\mathbb{R})$ e $0 = \mathfrak{F}^{-1}\hat{f} = 2\pi f$. $\square$

6.3 Trasformata di Fourier in L^2

Mentre nel caso delle serie di Fourier valeva $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$, su $\mathbb{R}$ questo non è più verificato. Vedremo allora come si può estendere comunque il concetto di trasformata di Fourier a tutto lo spazio $L^2(\mathbb{R})$.

Proposizione 6.3.1. *Lo spazio $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Su insiemi E di misura finita vale $L^2(E) \subset L^1(E)$, dunque possiamo approssimare $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $f_n = \chi_{[-n,n]} f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, e $f_n \to f$ in L^2 per Lebesgue. $\square$

Se $f \in L^1$ e $g \in L^\infty$, oppure $f \in L^\infty$ e $g \in L^1$, useremo d'ora in poi la notazione

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\, dx,$$

osservando che è ben definia e soddisfa le regole di una forma bilineare.

Lemma 6.3.2. *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $\langle \hat{f}, g \rangle = \langle f, \check{g} \rangle$.*

Dimostrazione. Semplice conto con scambio di integrale tramite Fubini. $\square$

Osservazione 6.3.3. Questo lemma implica che, se $f, g, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, allora $\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle$, con il teorema d'inversione.

Dimostriamo ora l'equivalente dell'identità di Parseval per la trasformata di Fourier:

Teorema 6.3.4 (Plancherel)**.** *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$: allora $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, e inoltre è verificata l'identità $\|\hat{f}\|_{L^2} = \sqrt{2\pi} \cdot \|f\|_{L^2}$.*

Dimostrazione. Siano ancora ρ la gaussiana standard e $\rho_\delta = \mathfrak{S}_\delta \rho$ gli pseudo-mollificatori. Come già visto $\widehat{f * \rho_\delta} \in L^1(\mathbb{R})$, da cui

$$\langle \hat{f}, \widehat{f * \rho_\delta} \rangle = 2\pi \langle f, f * \rho_\delta \rangle = 2\pi (f, f * \rho_\delta) \to 2\pi \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})},$$

dove $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ è il prodotto scalare in $L^2(\mathbb{R})$ e il passaggio al limite per $\delta \to 0$ avviene grazie alla continuità del prodotto scalare. D'altra parte

$$\langle \hat{f}, \widehat{f * \rho_\delta} \rangle = \langle \hat{f}, \hat{f}\hat{\rho}(\delta\cdot) \rangle = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2 e^{\frac{(\delta x)^2}{2}}\, dx.$$

La funzione $e^{\frac{(\delta x)^2}{2}}$ è positiva, pari e puntualmente converge crescendo alla costante 1 per $\delta \to 0$. Questo ci consente di applicare Beppo-Levi e ottenere

$$\lim_{\delta \to 0} \langle \hat{f}, \widehat{f * \rho_\delta} \rangle = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2 \, dx,$$

da cui per unicità del limite $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ e $\|\hat{f}\|_{L^2} = \sqrt{2\pi} \cdot \|f\|_{L^2}$. □

Questo teorema, combinato con il precedente risultato di densità, ci consente di estendere la trasformata di Fourier a tutto $L^2(\mathbb{R})$:

Corollario 6.3.5. *Sia $X = L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Allora X è un sottospazio denso di L^2, $\mathfrak{F} : X \to L^2$ è una $\sqrt{2\pi}$-isometria lineare compatibile con il prodotto scalare, e possiamo estendere $\mathfrak{F} : L^2 \to L^2$ per continuità, in modo tale che sia ancora una $\sqrt{2\pi}$-isometria lineare compatibile con il prodotto scalare.*

Dimostrazione. La densità e la 2π-isometria sono già state dimostrate. La compatibilità con il prodotto scalare deriva direttamente dall'identità polare:

$$(\hat{f}, \hat{g}) = \frac{1}{4}(\|\hat{f} + \hat{g}\|^2 - \|\hat{f} - \hat{g}\|^2) = \frac{1}{4} 2\pi(\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2) = 2\pi(f, g).$$

Si può estendere $\mathfrak{F}$ a tutto L^2 perché la 2π-isometria implica l'uniforme continuità, e la continuità di norma e prodotto scalare permette di concludere. □

Se $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$, il solito integrale che definisce $\hat{f}$ non è definito, tuttavia a volte possiamo dire qualcosa tramite i valori principali di Cauchy:

Proposizione 6.3.6. *Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$, e supponiamo che per q.o. $\xi \in \mathbb{R}$ esista il limite*

$$L(\xi) = \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} f(x) e^{-i\xi x} \, dx :$$

allora $\hat{f} = L$ quasi ovunque.

Dimostrazione. Sia $f_r = \chi_{[-r,r]} f \in L^1 \cap L^2$: chiaramente $f_r \to f$ in L^2, da cui $\hat{f}_r \to \hat{f}$ in L^2 per $\sqrt{2\pi}$-isometria. A meno di passare a sottosuccessioni, $\hat{f}_n \to \hat{f}$ quasi ovunque, ma chiaramente vale anche $f_n \to L$ quasi ovunque per costruzione, e si conclude. □

Vediamo come si estendono a $L^2(\mathbb{R})$ alcuni risultati precedenti:

Proposizione 6.3.7. *Sia $f \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ tale che $f' \in L^2(\mathbb{R})$: allora $\widehat{f'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$.*

Dimostrazione. Siano ancora ρ la gaussiana standard e $\rho_\delta = \mathfrak{G}_\delta$ gli pseudo-mollificatori gaussiani. Si può verificare, nonostante non siano veri mollificatori, che vale comunque

$$(f * \rho_\delta)' = f * \rho_\delta' = f' * \rho_\delta \to f' \text{ in } L^2,$$

da cui $(\widehat{f * \rho_\delta})' \to \widehat{f'}$ in L^2. D'altra parte

$$\widehat{f * \rho_\delta'}(\xi) = \hat{f}(\xi)\widehat{\rho_\delta'}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)\widehat{\rho_\delta}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi) e^{-\frac{(\delta\xi)^2}{2}} \to i\xi \hat{f}(\xi) \text{ in } L^1,$$

dove si è applicato Beppo-Levi. Passando alle sottosuccessioni, è chiaro che i due limiti devono coincidere quasi ovunque. □

Corollario 6.3.8. *Nelle ipotesi della proposizione precedente, si ha $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$; in particolare vale la formula di inversione per f.*

Dimostrazione. Sappiamo che $\hat{f} \in C_0$ e che $\widehat{f'}(\xi) = i\xi\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Spezziamo l'integrale $\int |\hat{f}|$ negli intervalli $]-\infty, -1]$, $[-1, 1]$ e $[1, +\infty[$:

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} |\hat{f}(\xi)|\, d\xi < \infty$ per continuità;
- $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|\, d\xi = \int_{1}^{+\infty} |\widehat{f'}(\xi)| \frac{1}{\xi}\, d\xi \leq \|\widehat{f'}\|_{L^2} \left\| \frac{1}{\xi} \right\|_{L^2} < \infty$ con Hölder.
- L'ultimo integrale si fa in modo analogo. □

Capitolo 7

Problemi generali

7.1 Equazione delle onde

Per *equazioni delle onde* si intendono PDE della forma

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$$

con $c > 0$ costante. Definiamo l'*operatore di d'Alembert* $\Box = \partial_{tt} - c^2\Delta$: in questo contesto l'equazione delle onde si può scrivere $\Box u = 0$.

Caso in 1 dimensione

Se siamo in 1 dimensione ($\Omega \subseteq \mathbb{R}$ oppure $\Omega = \mathbb{T}$), l'operatore di d'Alembert si scompone come $\Box = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)$. Potremmo inoltre impostare una riduzione al I ordine:

$$w = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \partial_t w = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ c^2 u_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2\partial_{xx} & 0 \end{pmatrix} w.$$

Questo ci suggerisce di imporre due condizioni iniziali: una su $u(0, \cdot)$ e una su $u_t(0, \cdot)$.

7.2 Autofunzioni del laplaciano

Supponiamo di avere un problema della forma $\Delta u = f$.

Si osserva che le funzioni trigonometriche $e^{i\lambda x}$, $\cos(\lambda x)$, $\sin(\lambda x)$ sono autofunzioni per l'operatore laplaciano Δ in una dimensione. Se f si può scrivere in forma di serie di Fourier, questo ci suggerisce di cercare soluzioni in forma di serie di Fourier e imporre condizioni sui coefficienti.

Similmente, si può osservare che le funzioni trigonometriche vettoriali $e^{i\vec{\lambda}\cdot\vec{\mathbf{x}}}$ sono autofunzioni per l'operatore laplaciano Δ in più dimensioni.

7.3 Soluzioni deboli

Supponiamo di voler risolvere l'equazione differenziale

$$u'(x) = f(x) \quad \text{su } \mathbb{T},$$

dove $f = \chi_{[-\pi,0[} + \chi_{[0,\pi[}$. Chiaramente nelle interpretazioni solite questo non ha senso, perché per il teorema di Darboux la funzione f non può essere derivata di una funzione continua. Proviamo tuttavia a cercare una soluzione formale in $L^2(\mathbb{T})$ tramite le serie di Fourier:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) &\Rightarrow\quad u'(x) &= -\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin(nx) \\ f(x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ disp}} \frac{\sin(nx)}{n} &\Rightarrow\quad u(x) &= \frac{a_0}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ disp}} \frac{\cos(nx)}{n^2} \end{aligned}$$

Studiando i coefficienti è chiaro che $u \in H^1_{\text{per}}$, per cui u ammette rappresentante C^0 e u', intesa come derivata formale della serie di Fourier, è ben definita, appartiene a $L^2(\mathbb{T})$ e in tal senso coincide effettivamente con f. Questa $u' \in L^2(\mathbb{T})$ è nota come *derivata debole* di $u \in L^2(\mathbb{T})$; in questo senso si dirà che u è una *soluzione debole* dell'equazione differenziale.

Capitolo 8

PDE sul toro

8.1 Equazione del calore

Cerchiamo soluzioni periodiche $u(t,x)$ di

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{su }]-\pi,\pi[\\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

dove $u_0(x) \in L^2(\mathbb{T})$ è un dato iniziale fissato.

Risoluzione. Sviluppiamo u_0 come serie di Fourier, e cerchiamo soluzioni che si possano scrivere analogamente:

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(t)e^{ikx}, \qquad u_0(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(0)e^{ikx}.$$

Si ottiene facilmente

$$u_t(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k'(t)e^{ikx}, \qquad u_{xx}(t,x) = -\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2 c_k(t)e^{ikx}$$

da cui, imponendo l'uguaglianza componente per componente nella prima equazione:

$$c_k'(t) = -k^2 c_k(t) \quad \Rightarrow \quad c_k(t) = c_k(0)e^{-k^2 t} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Otteniamo dunque

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(0)e^{-k^2 t}e^{ikx}.$$

Tutti questi conti per ora sono puralmente formali e non del tutto giustificati. □

Regolarità. Si osserva che per ogni $t > 0$ fissato si ha $u(t,x) \in H^m_{\text{per}}(-\pi,\pi)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, da cui $u(t,\cdot) \in C^\infty(\mathbb{T})$ per ogni $t > 0$, grazie al Teorema 5.3.6. Studiando le serie delle derivate parziali, queste convergono totalmente e quindi si ha anzi $u \in C^\infty(\mathbb{T},\mathbb{R}^+)$. Per $t < 0$ il problema è effettivamente mal posto.

Stime dell'energia. Si supponga $u(\cdot,t) \in C^2(\mathbb{T})$ per ogni $t > 0$ e $u(x,\cdot)$ derivabile in $\mathbb{R}^+$ per q.o. $x \in \mathbb{T}$. Allora possiamo fare i seguenti conti, sfruttando la periodicità per integrare per parti e le ipotesi di regolarità per derivare sotto il segno di integrale:

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_t u - u_{xx} u = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} u_t u\, dx - \int_{-\pi}^{\pi} u_{xx} u\, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_t u\, dx - \int_{-\pi}^{\pi} u_{xx} u\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{dt} u^2\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} u_x^2\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\pi}^{\pi} u^2\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} u_x^2\, dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 + \|u_x\|_{L^2}^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{dt}\|u\|^2\, ds + \int_0^t \|u_x\|^2\, ds = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + \int_0^t \|u_x\|^2\, ds = \frac{1}{2}\|u_0\|^2.$$

Da questo si deduce in particolare che l'*energia* $\|u\|$ diminuisce nel tempo, in un modo che dipende unicamente da $\|u_x\|$.

Vediamo adesso una stima su $\|u_x\|$:

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_t u_{xx} - u_{xx}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} u_t u_{xx}\, dx - \int_{-\pi}^{\pi} u_{xx}^2\, dx = 0$$

da cui si arriva analogamente a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2 + \|u_{xx}\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \|u_x(t)\|^2 + \int_0^t \|u_{xx}\|^2\, ds = \|u_x(0)\|^2.$$

Questa tuttavia non ci piace, perché a priori potremmo non avere garanzie di convergenza su $\|u_x(0)\|$. Applichiamo dunque una "stima pesata":

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}t\frac{d}{dt}\|u_x\|^2 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(t\|u_x\|^2\right) - \frac{1}{2}\|u_x\|^2 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(t\|u_x\|^2\right) + t\|u_{xx}\|^2 = \frac{1}{2}\|u_x\|^2 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}t\|u_x(t)\|^2 + \int_\varepsilon^t s\|u_{xx}\|^2\, ds = \frac{1}{2}\int_\varepsilon^t \|u_x\|^2\, ds + \frac{1}{2}\varepsilon\|u_x(\varepsilon)\|^2.
\end{aligned}$$

dove abbiamo integrato in $0 < \varepsilon < t$, con lo scopo di prendere ε piccolo a piacere. Per passare al limite $\varepsilon \to 0$ con il cuore in pace, bisogna approssimare u tramite le soluzioni u^m ricavate a partire dal dato iniziale troncato $u_0^m(x) = \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ikx}$: è chiaro che $\forall t > 0$ si ha $u^m(t,\cdot) \to u(t,\cdot)$ in $L^2(\mathbb{T})$ con successione di norme crescenti (e analogamente $u_x^m \to u_x$); inoltre le u^m sono $C^\infty(\mathbb{T},\mathbb{R})$ e questo ci permette di ottenere il limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon\|u_x(\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \to 0.$$

Applicando la stima sugli approssimanti, passando al limite otteniamo

$$\frac{1}{2}t\|u_x^m(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}\int_0^t \|u_x^m\|^2\, ds + \frac{1}{2}\liminf_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon\|u_x^m(\varepsilon)\|^2 \leq \frac{1}{2}\int_0^t \|u_x\|^2\, ds \leq \frac{1}{4}\|u_0\|^2$$

aiutandoci con la prima stima dell'energia. Infine possiamo passare al $\sup\limits_{m\to\infty}$ e ottenere

$$\|u_x(t)\|^2 \leq \frac{1}{2t}\|u_0\|^2 \qquad \forall t > 0.$$

Un'altra stima ancora si potrebbe fare moltiplicando per tu_t.

Unicità. Dalla stima dell'energia si può dedurre anche l'unicità della soluzione (con opportune ipotesi di regolarità). Se infatti u, v sono due soluzioni con dato iniziale u_0, si può porre $w = u - v$ e osservare che w è soluzione dell'equazione del calore con condizioni iniziali $w_0 \equiv 0$. In particolare $\|w_0\| = 0$ e quindi $\|w\|$ è costantemente nulla nel tempo, cioè $w \equiv 0$ e infine $u \equiv v$.

8.1.1 Condizione di Dirichlet

Studiamo ora il problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{su }]0, \pi[, \\ u(0, x) = u_0(x) \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \end{cases}$$

Per trovare soluzioni sarà sufficiente estendere il problema a $]-\pi, \pi[$ per disparità. Ricordiamo che un prolungamento dispari renderebbe nulli i coefficienti del coseno, quindi può convenire fare i conti con lo sviluppo in serie di Fourier reale.

Regolarità e unicità. Analogo al caso precedente.

8.1.2 Condizione di Neumann

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(t, x) & \text{su }]0, \pi[, \\ u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0 & \text{(condizione di Neumann)} \\ u(0, x) = 0 \end{cases}$$

Questa conviene risolverla con un prolungamento pari, perché la condizione è di annullare la derivata al bordo.

8.1.3 Principio di sovrapposizione

Consideriamo un problema della forma

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(t, x) & \text{su } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{su } \mathbb{T}. \end{cases}$$

In generale possiamo decomporlo nei due problemi.

$$\begin{cases} \bar{u}_t - \bar{u}_{xx} = 0 & \text{su } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T} \\ \bar{u}(0, x) = u_0(x) & \text{su } \mathbb{T} \end{cases}, \qquad \begin{cases} \tilde{u}_t - \tilde{u}_{xx} = f(t, x) & \text{su } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{T} \\ \tilde{u}(0, x) = 0 & \text{su } \mathbb{T} \end{cases}.$$

Infatti, fissato $\tilde{u}$, c'è una relazione biunivoca tra le soluzioni $\bar{u}$ e quelle u data da $u = \bar{u} + \tilde{u}$ (funziona tutto per linearità dell'equazione del calore).

8.2 Equazione di Poisson

Per *equazioni di Poisson* sul toro si intendono generalmente PDE della forma

$$-\Delta u = f \quad \text{su } \mathbb{T}^N,$$

dove $f \in L^2(\mathbb{T}^N)$ è data.

Risoluzione. Cercando $u \in L^2(\mathbb{T}^N)$, imposteremo il problema formalmente con le serie di Fourier:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^N} \hat{u}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, & f(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^N} \hat{f}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\ -\Delta u &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^N} |\mathbf{k}|^2 \hat{u}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, & |\mathbf{k}|^2 \hat{u}_{\mathbf{k}} &= \hat{f}_{\mathbf{k}} \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N. \end{aligned}$$

C'è un problema di compatibilità: è necessario che valga $\hat{f}_{\mathbf{0}} = 0$, cioè

$$\int_{\mathbb{T}^N} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

8.3 Equazione di Helmholtz

Per *equazione di Helmholtz* sul toro intendiamo generalmente PDE della forma

$$u - \Delta u = f \quad \text{su } \mathbb{T}^N,$$

dove $f \in L^2(\mathbb{T}^N)$ è data.

Risoluzione. L'impostazione con serie di Fourier è analoga al caso dell'equazione di Poisson, tuttavia non ci sono problemi di compatibilità: infatti si arriva a

$$(1 + |\mathbf{k}|^2)\hat{u}_{\mathbf{k}} = \hat{f}_{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad \hat{u}_{\mathbf{k}} = \frac{\hat{f}_{\mathbf{k}}}{1 + |\mathbf{k}|^2} \qquad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N.$$

8.4 Equazione delle onde

Vogliamo risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{su } \mathbb{T} \times]0, T[, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{su } \mathbb{T}, \\ u_t(0, x) = u_1(x) & \text{su } \mathbb{T}, \end{cases}$$

dove $u_0, u_1 \in L^2(\mathbb{T})$ e $c > 0$ sono dati. Cercheremo in particolare *soluzioni classiche*, cioè $u \in C^2(\mathbb{T},]0, T[) \cap C(\mathbb{T}, [0, T])$ che soddisfano il sistema.

Stime dell'energia

Sia u una soluzione classica: dall'equazione delle onde, moltiplicando per u_t e integrando su $\mathbb{T}$, sfruttando la periodicità per integrare per parti, otteniamo la seguente stima dell'energia:

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_{tt} u_t \, dx - c^2 \int_{-\pi}^{\pi} u_{xx} u_t \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{T})} + c^2 \frac{d}{dt} \|u_x\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \right) = 0,$$

in particolare la quantità $\|u_t\|^2 + \|u_{xx}\|^2$ sarà costante nel tempo.

Unicità

Supponiamo di avere due soluzioni classiche u, v. Sia $w = u - v$: questa sarà una soluzione classica del sistema omogeneo

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 & \text{su } \mathbb{T} \times]0, T[, \\ w(0, x) = 0 & \text{su } \mathbb{T}, \\ w_t(0, x) = 0 & \text{su } \mathbb{T}. \end{cases}$$

In particolare $\|w_t(0)\| = \|w_{xx}(0)\| = 0$, dunque per la stima dell'energia precedente queste quantità saranno costantemente nulle nel tempo. Ma $w_t \equiv 0$ implica in particolare $w \equiv 0$, dunque $u = v$. Ne possiamo dedurre che la soluzione classica se esiste è unica.

Esistenza

Sviluppiamo in serie di Fourier:

$$u_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{ikx}, \qquad u_1(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k e^{ikx}.$$

Cerchiamo $u(t, x)$ che si possa sviluppare come

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(t) e^{ikx}.$$

Conti formali portano a

$$\ddot{c}_k(t) = -c^2 k^2 c_k(t), \quad c_k(0) = \alpha_k, \quad \dot{c}_k(0) = \beta_k \qquad \forall k \in \mathbb{Z},$$

da cui si ricava facilmente

$$\begin{aligned} c_0(t) &= \alpha_0 + \beta_0 t \\ c_k(t) &= a_k e^{ickt} + b_k e^{-ickt}, \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2} \left(\alpha_k + \frac{\beta_k}{ick} \right) \\ b_k &= \frac{1}{2} \left(\alpha_k - \frac{\beta_k}{ick} \right) \end{aligned}.$$

Quindi possiamo scrivere

$$u(t, x) = \alpha_0 + \beta_0 t + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\alpha_k + \frac{\beta_k}{ick} \right) e^{ik(x+ct)}}_{\varphi_1(x+ct)} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\alpha_k - \frac{\beta_k}{ick} \right) e^{ik(x-ct)}}_{\varphi_2(x-ct)}. \tag{8.1}$$

Perché $u \in C^2(\mathbb{T} \times]0, T[)$ dovremo imporre delle condizioni sui coefficienti.

Teorema 8.4.1. *Siano $u_0, u_1 \in L^2(\mathbb{T})$ tali che $\sum k^2|\alpha_k| < \infty$ e $\sum |k||\beta_k| < \infty$. Allora l'equazione delle onde su $\mathbb{T}$ ammette un'unica soluzione classica, che sarà* (8.1).

Dimostrazione. Per risultati precedenti sulle serie di Fourier, le ipotesi implicano $u_0 \in C^2(\mathbb{T})$ e $u_1 \in C^1(\mathbb{T})$. Una soluzione classica si può sempre sviluppare in serie di Fourier e quindi è della forma (8.1); inoltre ne abbiamo già verificato l'unicità. Resta da verificare che le condizioni date sono sufficienti per la convergenza e regolarità di u. Sarà sufficiente mostrare la convergenza totale delle derivate parziali fino al II ordine; basterà verificarlo su

$$\partial_s^2 \left(\left(\alpha_k + \frac{\beta_k}{ick} \right) e^{iks} \right),$$

dato che ∂_x e ∂_t differiscono solo dalla presenza di un coefficiente moltiplicativo $c > 0$.

$$\left| \partial_s^2 \left(\left(\alpha_k + \frac{\beta_k}{ick} \right) e^{iks} \right) \right| = k^2 \left| \alpha_k + \frac{\beta_k}{ick} \right| \le k^2 |\alpha_k| + c^{-1} |k||\beta_k|. \qquad \square$$

Si osserva inoltre che queste soluzioni sono ben definite anche per tempi negativi, cosa che non succedeva nel caso delle equazioni del calore.

Capitolo 9

PDE su $\mathbb{R}^N$

Torna utile il seguente risultato (che è un cannone di IAM quindi non dimostreremo):

Teorema 9.0.2 (decomposizione spettrale del laplaciano)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un aperto limitato di classe C^1. Allora $L^2(\Omega)$ ammette una base di Hilbert di autofunzioni del laplaciano, nulle sul bordo di Ω. Più precisamente, $\exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ base di Hilbert di $L^2(\Omega)$ e $\exists (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ successione crescente e divergente tali che $-\Delta f_n = \lambda_n f_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

9.1 Equazione del calore

9.1.1 Equazione del calore in più dimensioni

Cerchiamo $u \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ di classe C^1 tale che

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{su } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \text{ per } t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{su } \Omega. \end{cases}$$

dove $u_0 \in L^2(\Omega)$.

Risoluzione. Chiedendo che $u(t,\cdot) \in L^2(\Omega)$ per ogni $t > 0$, possiamo scrivere

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) f_n(x) \quad \Rightarrow \quad -\Delta u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n(t) f_n(x)$$

e si risolve formalmente come si faceva con le serie di Fourier.

Stima dell'energia. Hint: si può fare integrando per parti con la prima identità di Green.

9.2 Equazione delle onde

9.2.1 Caso unidimensionale

Consideriamo l'equazione

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{su } \mathbb{R} \times]0, T[.$$

con $c > 0$ costante. Si verifica immediatamente che, date $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2(\mathbb{R})$ qualsiasi, allora

$$u(t, x) = mt + \varphi_1(x + ct) + \varphi_2(x - ct)$$

è sempre una soluzione. Supponiamo ora di avere delle condizioni iniziali:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{su } \mathbb{R} \times]0, T[\\ u(0, x) = u_0(x) & \text{su } \mathbb{R} \\ u_t(0, x) = u_1(x) & \text{su } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sostituendo $t = 0$ otteniamo

$$\begin{cases} u_0(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \\ \dfrac{u_1(x) - m}{c} = \varphi_1'(x) - \varphi_2'(x) \end{cases},$$

e prendendo un'opportuna primitiva v di $(u_1(x) - m)/c$ si può concludere

$$\varphi_1 = \frac{u_0 + v}{2}, \qquad \varphi_2 = \frac{u_0 - v}{2}.$$

La scelta di m, φ_1, φ_2 quindi non è univoca, tuttavia si può verificare facilmente che ciascuna di queste porta alla stessa $u(t, x)$, ricavando la *formula di d'Alembert*:

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi)\, d\xi.$$

Ricordando la decomposizione dell'operatore di d'Alembert, osserviamo che

$$\forall \varphi \in C^1(\mathbb{R}) \qquad (\partial_t + c\partial_x)(\varphi(x - ct)) = 0, \quad (\partial_t - c\partial_x)(\varphi(x + ct)) = 0.$$

Questo ci suggerisce di indebolire le ipotesi, passando a soluzioni deboli.

Osserviamo che queste soluzioni sono ben definite anche per tempi negativi. Inoltre il valore di $u(t, x)$ per $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, T[$ dipende solo dalle condizioni iniziali $u_0(x)$, $u_1(x)$ ristrette all'intervallo $]x - ct, x + ct[$; ne deduciamo che l'informazione (il dato iniziale) si propaga a velocità c e non è istantanea, a differenza del caso dell'equazione del calore.

9.2.2 Caso generale

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Vorremmo cercare soluzioni $u(t, x)$ di

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \text{su } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{su } \Omega \\ u_t(x, 0) = u_1(x) & \text{su } \Omega \end{cases},$$

dove $u_0, u_1 \in L^2(\Omega)$ sono date.

Se Ω è limitato e $\partial\Omega$ è C^1, allora $\exists (u_j)$ base di Hilbert di $L^2(\Omega)$, composta da autovettori di $-\Delta$, con autovalori positivi crescenti (λ_j), tale che $u_j \in C^\infty(\Omega)$ e $u_j|_{\partial\Omega} = 0 \ \ \forall j \in \mathbb{N}$. Di conseguenza una soluzione con ipotesi decenti di regolarità si potrà scrivere come

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(t) u_j(x) \qquad\qquad u_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j u_j(x)$$
$$u_{tt}(t,x) = \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{c}_j(t) u_j(x) \qquad\qquad u_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j u_j(x)$$
$$\Delta u(t,x) = -\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j c_j(t) u_j(x),$$

da cui otteniamo le solite equazioni $\ddot{c}_j(t) = -c^2 \lambda_j c_j(t)$, che ci portano a

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} \left(\alpha_j + \frac{\beta_j}{ic\lambda_j}\right) e^{ic\lambda_j t} u_j(x) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} \left(\alpha_j - \frac{\beta_j}{ic\lambda_j}\right) e^{-ic\lambda_j t} u_j(x).$$

In tutto questo non abbiamo giustificato adeguatamente la convergenza, tuttavia si può notare che dipende dai coefficienti dei dati iniziali e dalle autofunzioni, che sono $C^\infty(\Omega)$ e nulle sul bordo (quindi molto regolari).

Capitolo 10

Equazioni differenziali radiali e funzioni armoniche

10.1 Problemi con funzioni radiali

10.1.1 Equazione di Navier-Stokes e risoluzione di Poiseuille

Si consideri il problema

$$\begin{cases} \partial_t \vec{\mathbf{u}} + (\vec{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\vec{\mathbf{u}} - \nu\Delta\vec{\mathbf{u}} + \nabla\rho = 0 & \text{su } \Omega \times]0, T[, \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0 & \\ \vec{\mathbf{u}} = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ è un aperto, $\vec{\mathbf{u}} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ è il flusso di un liquido, $\nu : \Omega \to \mathbb{R}$ è la sua *viscosità* e $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ è la sua *pressione*. Il *termine convettivo o del trasporto* è

$$(\vec{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\vec{\mathbf{u}} := \left(\sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_{i=1,\dots,3}.$$

Ci mettiamo in particolare nelle ipotesi in cui Ω è un tubo cilindrico ($\Omega = I \times B(0, R)$), il flusso è del tipo $\vec{\mathbf{u}} = (0, 0, \omega(x_1, x_2))$ (indipendente dal tempo!), infine $\omega(x_1, x_2) = \omega(r)$ è radiale (dipende solo dalla distanza dal centro del tubo).

Risoluzione. Si verifica tramite conti che le ipotesi implicano $(\vec{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\vec{\mathbf{u}} = 0$ e $\nabla \cdot u = 0$, da cui $-\nu\Delta\vec{\mathbf{u}} + \nabla\rho$. Studiandolo componente per componente si osserva che $\rho = \rho(x_3)$ e inoltre

$$-\nu\omega_{x_1 x_1} - \nu\omega_{x_2 x_2} = \rho_{x_3} \quad \Rightarrow \quad \rho_{x_3} = c \text{ costante}.$$

Il problema può quindi essere ridotto a

$$\begin{cases} -\nu\Delta\omega(x_1, x_2) = c & \text{su } B(0, R), \\ \omega = 0 & \text{su } \partial B(0, R) \end{cases}$$

o meglio, sfruttando il fatto che $\omega(x_1, x_2) = \omega(r)$:

$$\begin{cases} -\nu\Delta\omega(r) = c & \text{su }]0, R[, \\ \omega(R) = 0. \end{cases}$$

Per la Proposizione 11.2.1 scriviamo

$$\begin{cases} -\nu\left(\omega''(r) + \dfrac{\omega'(r)}{r}\right) = c & \text{su }]0, R[, \\ \omega(R) = 0, \end{cases}$$

che ammette soluzioni della forma

$$\omega(r) = -\frac{c}{4\nu}r^2 + \alpha\log r + \beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Non volendo avere poli, imponiamo $\alpha = 0$; la condizione al bordo infine ci dà la soluzione specifica

$$\omega(r) = \frac{c}{4\nu}(R^2 - r^2).$$

□

10.1.2 Sfera con irraggiamento

Consideriamo il seguente problema:

$$\begin{cases} \partial_t u - k\Delta u = 0 & \text{su } B \times]0, T[, \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{su } B \times \{0\}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = -hu & \text{su } \partial B \times]0, T[, \end{cases}$$

dove $B = B(0, 1)$, $h, k \in \mathbb{R}$ sono costanti e u_0 è assegnata. Supponiamo inoltre che u sia radiale e che si possano separare le variabili: $u(x, t) = \psi(r)T(t)$. Sfruttando la formula del laplaciano di funzioni radiali otteniamo:

$$\psi(r)T'(t) - k\left(\psi''(r) + 2\frac{\psi'(r)}{r}\right)T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = k\left(\frac{\psi''(r)}{\psi(r)} + 2\frac{\psi'(r)}{r\psi(r)}\right)$$

(dove stiamo dando per scontato di poter dividere per $T(t)$ e per $\psi(r)$). Dato che nell'ultima equazione l'LHS dipende solo da t e il RHS dipende solo da r, in realtà si tratta di un valore costante, quindi scriviamo

$$T'(t) = -\lambda^2 T(t), \qquad k\psi''(r) + 2k\frac{\psi'(r)}{r} + \lambda^2\psi(r) = 0$$

(si prende la costante $-\lambda^2$ negativa in modo da avere decadimento). Si può infine notare che per simmetria sferica

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r} = \psi'(r)T(t) \quad \Rightarrow \quad \psi'(r)T(t) = -hu.$$

Osservando che a meno di riscalare $\psi(r)$ si può prendere wlog $T(0) = 1$, il problema differenziale si può riscrivere come

$$\begin{cases} \psi(r) = u_0(r); \\ k\psi''(r) + 2k\dfrac{\psi'(r)}{r} + \lambda^2\psi(r) = 0; \\ T(t) = e^{-\lambda^2 t}; \\ \psi'(R) = -h\psi(R). \end{cases}$$

A questo punto possiamo porre $u(t,x) = u_0(x)e^{-\lambda^2 t}$, ma c'è un problema: le condizioni iniziali devono essere compatibili con la seconda e la quarta equazione. La seconda equazione è nota come *equazione di Bessel*, non è risolvibile in maniera elementare e non è detto a priori che ci fornisca un λ reale.

10.2 Funzioni armoniche

Definizione 10.2.1. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ è un aperto, una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ si dice *armonica* se $\Delta f = 0$.

10.2.1 Funzione armonica su un cerchio

Supponiamo di volere trovare soluzioni di

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{su } B, \\ u = g & \text{su } \partial B, \end{cases}$$

dove $B = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ e $g \in C(\partial B)$ è assegnata.

Risoluzione

Dato che $B \cong \mathbb{T}$, è lecito sviluppare g come serie di Fourier:

$$g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}_k e^{ikt} \qquad \text{in } L^2(\mathbb{T})$$

(attenzione che non abbiamo a priori garanzie di convergenza puntuale). Vogliamo estendere g a tutto B, lo facciamo nel seguente modo, in coordinate polari:

$$u(r,\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}_k r^{|k|} e^{ik\theta} \quad \text{su }]0,1[\times \mathbb{T}.$$

Dobbiamo però verificare che sia tutto ben definito. Come prima cosa osserviamo che

$$\forall k \in \mathbb{Z} \ \ |\hat{g}_k| \leq \|g\|_{L^\infty}.$$

Per ogni $r \in]0,1[$ si verifica

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{g}_k| r^{|k|} \leq \|g\|_{L^\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{\log r |k|} < \infty,$$

per cui si ha convergenza totale su $[\varepsilon, 1-\varepsilon] \times \mathbb{T}$ per ogni $\varepsilon > 0$. Si osserva facilmente che $u(r,\theta) \to \hat{g}_0$ per $r \to 0$, quindi possiamo estendere la funzione a tutta B. Risulta comodo scrivere la funzione anche in coordinate cartesiane:

$$u(x,y) = \hat{g}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{g}_k (x+iy)^k + \hat{g}_{-k}(x-iy)^k).$$

Studiando le derivate di u otteniamo

$$D_x^h D_y^l u = i^l \sum_{k=h+l}^{\infty} \frac{k!}{(k-h-l)!} \left(\hat{g}_k (x+iy)^{k-h-l} + (-1)^l \hat{g}_{-k}(x-iy)^{k-h-l}\right),$$

che sono ben definite e continue in B per convergenza totale, dunque $u \in C^\infty(B)$. I problemi quindi si presentano solo per $r \to 1^-$. La convergenza totale ci permette di scambiare serie e integrale $\forall r \in]0,1[$:

$$u(r,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} g(s) \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ik(\theta-s)}\, ds =: (g * P_r)(\theta).$$

Studiamo ora il *nucleo di Poisson* $P_r(t)$ per $r \in]0,1[$: i soliti calcoli con le progressioni geometriche portano (al limite) a

$$P_r(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} r^{|k|} e^{ikt}\, dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-r^2}{r^2 - 2\cos(t) r + 1}.$$

Si verifica facilmente che sono verificate le seguenti proprietà:

1. $P_r(t) \geq 0$ per ogni $(r,t) \in]0,1[\times \mathbb{T}$;
2. $P_r \in L^1(\mathbb{T})$ e $\|P_r\|_{L^1(\mathbb{T})} = 1$ per ogni $r \in]0,1[$;
3. $\forall \delta > 0$ si ha $P_r \to 0$ uniformemente per $r \to 1^-$ su $\mathbb{T} \setminus]-\delta, \delta[$.

Queste proprietà ci consentono di applicare la stessa dimostrazione del Teorema di Fejer e ottenere la convergenza uniforme di $u(r,\cdot) \to g$ per $r \to 1^-$. Ci resta solo da verificare che u è armonica, ma per le proprietà della convoluzione

$$\Delta u = \Delta(g * P_r) = g * \Delta P_r,$$

e si può dimostrare facilmente che $\Delta P_r(r,t) = 0$ su B.

Regolatità al bordo

Possiamo chiederci se anche ∇u si comporta bene per $r \to 1^-$, o quali condizioni siano necessarie per avere regolarità. A tal scopo, possiamo calcolare $\|\nabla u\|_{L^2(B)}$ tramite la formula del gradiente in coordinate polari:

$$\int_B |\nabla u|^2\, dx = \int_0^1 r\, dr \int_{-\pi}^{\pi} |u_r(r,\theta)|^2\, d\theta + \int_0^1 r\, dr \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{1}{r} u_\theta(r,\theta)\right|^2\, d\theta.$$

Scrivendo tutto come serie, sfruttando l'identità di Parseval e la convergenza totale per $r \in]0,1[$ si deduce

$$\int_B |\nabla u|^2\, ds = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k| |\hat{g}_k|^2.$$

10.2.2 Funzione armonica radiale

Limitandoci alla ricerca di funzioni armoniche radiali $\psi(r)$ in $\mathbb{R}^N$ con $N \geq 2$, per la formula del laplaciano di funzioni radiali abbiamo

$$\psi''(r) + (N-1)\frac{\psi'(r)}{r} = 0,$$

da cui ponendo $\eta(r) = \psi'(r)$ si ricava facilmente

$$\eta(r) = \frac{a}{r^{N-1}} \quad \Rightarrow \quad \psi(r) = \begin{cases} \dfrac{a}{(N-2)r^{N-2}} + b & \text{se } N > 2, \\ a \log r + b & \text{se } N = 2, \end{cases}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie. Una scelta opportuna di costanti (che non giustificheremo) porta a scrivere

$$\begin{cases} \dfrac{1}{N(N-2)\omega_N}\dfrac{1}{r^{N-2}} & \text{se } N > 2, \\ -\dfrac{\log r}{2\pi} & \text{se } N = 2, \end{cases}$$

dove ω_N è il volume della palla N-dimensionale. Queste in particolare, saranno chiamate *soluzioni fondamentali dell'equazione di Laplace.* Nonostante le soluzioni fondamentali abbiano un polo in 0, si verifica che sono integrabili in $B(0,1)$.

10.2.3 Formula di rappresentazione di Green

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto con bordo C^1, sia $u \in C^2(\overline{\Omega})$ una funzione arbitraria. Sia $\xi \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon = B(\xi, \varepsilon) \subseteq \Omega$, sia $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B_\varepsilon$, sia $\psi(r)$ soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace e sia $v(x) = \psi(|x-\xi|)$ la soluzione con polo traslato in ψ, che sarà ancora armonica. Integriamo su Ω_ε con la seconda identità di Green:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) ds + \int_{\partial B_\varepsilon} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right) ds.$$

Facciamo le seguenti ossevazioni:

1. v è armonica, quindi $\int_{\Omega_\varepsilon} u\Delta v\, dx = 0$.
2. $v = \psi(\varepsilon)$ su ∂B_ε, quindi

$$\int_{\partial B_\varepsilon} v\frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \psi(\varepsilon)\int_{\partial B_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \psi(\varepsilon)\int_{B_\varepsilon} \Delta u\, dx,$$

   dove si è usata la prima identità di Green. Sfruttando la media integrale su B_ε, per una certa costante $c > 0$ vale

$$\psi(\varepsilon)\int_{B_\varepsilon} \Delta u\, dx = c\varepsilon^2 \frac{1}{\omega_N \varepsilon^N}\int_{B_\varepsilon} \Delta u \to 0$$

   per $\varepsilon \to 0$.

3. Per convergenza dominata si ha

$$\int_{\Omega_\varepsilon} v\Delta u\, dx \to \int_\Omega v\Delta u\, dx$$

per $\varepsilon \to 0$.

4. $\partial v/\partial n = -\psi'(\varepsilon)$ su ∂B_ε (il segno dipende dal verso di percorrenza), dunque possiamo scrivere

$$\int_{\partial B_\varepsilon} u\frac{\partial v}{\partial n}\, ds = -\psi'(\varepsilon)\int_{\partial B_\varepsilon} u\, ds = \frac{1}{N\omega_N \varepsilon^{N-1}}\int_{\partial B_\varepsilon} u\, ds \to u(\xi)$$

per $\varepsilon \to 0$, per media integrale su ∂B_ε (questo spiega la scelta delle costanti per la soluzione fondamentale).

Passando al limite otteniamo quindi

$$u(\xi) = -\int_\Omega \psi(|x-\xi|)\Delta u(x)\, dx + \int_{\partial\Omega}\left(\psi(|x-\xi|)\frac{\partial u}{\partial n}(x) - u(x)\frac{\partial \psi}{\partial n}(|x-\xi|)\right) ds, \qquad (10.1)$$

che è valida $\forall \xi \in \Omega$. Non ci piace il termine $\partial u/\partial n$, perché in genere non ci è noto. Introduciamo quindi $\forall \xi \in \Omega$ un termine di correzione $\omega_\xi(x) \in C^2(\overline{\Omega})$ tale che

$$\begin{cases} \Delta\omega_\xi = 0 & \text{su } \Omega; \\ \omega_\xi(x) = \psi(|x-\xi|) & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Applicando la seconda formula di Green a ω_ξ e u in Ω otteniamo

$$\int_\Omega \omega_\xi \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega}\psi(|x-\varepsilon|)\frac{\partial u}{\partial n}\, ds - \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial \omega_\xi}{\partial n}\, ds.$$

Definendo adesso la *funzione di Green* $G(x,\xi) = \psi(|x-\xi|) - \omega_\xi(x)$, possiamo combinare questi conti con i precedenti per ottenere la *formula di rappresentazione di Green*:

$$u(\xi) = -\int_\Omega G(x,\xi)\Delta u(x)\, dx - \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial G}{\partial n}(x,\xi)\, ds.$$

Funzioni a supporto compatto

Supponiamo che $\operatorname{supp} u$ sia un compatto contenuto in Ω: allora l'equazione (10.1) diventa

$$u(\xi) = -\int_{\mathbb{R}^N}\psi(|\xi - x|)\Delta u(x)\, dx = -(\psi * \Delta u)(\xi).$$

Principio della media

Cosa succede se u è armonica in Ω, ma integriamo su una palla $B = B(\xi, R) \subseteq \Omega$? Possiamo usare come termine di correzione la costante $\omega(x) \equiv \psi(R)$ in modo tale che

$$-\frac{\partial G}{\partial n}(x,\xi) = -\psi'(|x-\xi|) = \frac{1}{|\partial B(0,R)|} \quad \text{su } \partial B(\xi, R),$$

e quindi otteniamo

$$u(\xi) = \frac{1}{|\partial B(\xi, R)|} \int_{\partial B(\xi,R)} u(x)\, ds =: \fint_{\partial B(\xi,R)} u(x)\, ds,$$

cioè il valore assunto da u in un punto ξ è la media integrale di u su una qualsiasi superficie sferica centrata in esso.

Capitolo 11

Utilità

11.1 Integrali

Teorema 11.1.1 (divergenza)**.** *Se* $V \subseteq \mathbb{R}^3$ *e* $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *è un campo vettoriale abbastanza regolare allora*

$$\int_V \nabla \cdot v\, dv = \int_{\partial V} v \cdot n\, ds.$$

Proposizione 11.1.2 (I identità di Green)**.** *Sia* $U \subseteq \mathbb{R}^3$ *con* $\partial U \in C^1$*, siano* $\varphi \in C^2(U)$ *e* $\psi \in C^1(U)$*. Allora*

$$\int_U \psi \Delta\varphi\, dV + \int_U \nabla\psi \cdot \nabla\varphi\, dV = \int_{\partial U} \psi(\nabla\varphi \cdot n) dS.$$

Proposizione 11.1.3 (II identità di Green)**.** *Sia* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ *con* $\partial\Omega \in C^1$*, siano* $u, v \in C^2(U)$*. Allora*

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v) = \int_{\partial\Omega} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right).$$

11.2 Coordinate polari

Proposizione 11.2.1 (laplaciano di funzioni radiali)**.** *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^N$ *e sia* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione* C^2 *radiale, cioè tale che* $f(\mathbf{x}) = f(r) \in C^2([0, R[)$*, dove* $r = |\mathbf{x}| = (x_1^2 + \ldots + x_N^2)^{\frac{1}{2}}$*. Allora*

$$\Delta_{\mathbf{x}} f(r) = f''(r) + (N-1)\frac{f'(r)}{r}.$$

Dimostrazione. Contacci. □

Proposizione 11.2.2 (gradiente in coordinate polari)**.** *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbb{R}^2$ *e sia* $f \in C^1(\Omega)$*. Allora*

$$\nabla f = f_x \mathbf{e}_x + f_y \mathbf{e}_y = f_r \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{r} f_\theta \mathbf{e}_\theta,$$

dove ∇f è stato riscritto nelle coordinate

$$\mathbf{e}_\rho = \cos\theta \mathbf{e}_x + \sin\theta \mathbf{e}_y, \qquad \mathbf{e}_\rho = -\sin\theta \mathbf{e}_x + \cos\theta \mathbf{e}_y.$$

Dimostrazione. Conti. □

Proposizione 11.2.3 (laplaciano in coordinate polari)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$ e sia $f \in C^2(\Omega)$. Allora*

$$\Delta_{\mathbf{x}}\omega(r,\theta) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = f_{rr} + \frac{f_r}{r} + \frac{f_{\theta\theta}}{r^2}.$$

Dimostrazione. Ancora più contacci. □