Esercizi di istituzioni di algebra

Roberto Pagaria

21 dicembre 2014

Esercizio 1

Testo

A lezione abbiamo dimostrato che, dati un campo K, una K-algebra finitamente generata B, e un embedding ϕ di K in un campo algebricamente chiuso L, esiste una omomorfismo

$$\tilde{\phi} : B \to L$$

che estende ϕ. Come si dimostra, a partire da questo che, dato un ideale proprio I in $K[X_1, \dots, X_n]$, il suo luogo di zeri $V(I)$ in $\overline{K}^n$ non è vuoto?

Soluzione

Sia $A = K[x_1, \dots, x_n]$ una K-algebra ed m un ideale massimale contenente I. Poiché $V(m) \subset V(I)$ per dimostrare che $V(I)$ è non vuota in $\overline{K}^n$ mi basta dimostrare che la varietà $V(m)$ è non vuota. Definendo $B = {}^{A}\!/\!_{m}$ osservo che B è un campo ed è una K-algebra finitamente generata. Scelgo $L = \overline{K}$ e φ l'inclusione di K in $\overline{K}$. Per quanto visto a lezione l'omomorfismo si estende a $\tilde{\varphi} : B \longrightarrow \overline{K}$. Sia $\bar{\varphi} = \tilde{\varphi} \circ \pi$ dove π è la prioezione di A in B e sia $\xi_i = \bar{\varphi}(x_i) \in \overline{K}$. Voglio dimostrare che ogni polinomio $f \in I$ si annulla in $\underline{\xi}$ (cioè $f(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$). So che $0 = \bar{\varphi}(f) = f(\bar{\varphi}(\underline{x})) = f(\underline{\xi})$ e quindi la varietà è non vuota.

Esercizio 2

Testo

Sia $\dfrac{\mathbb{C}[x, y, z]}{(y^2 - x^3 - x^2)}$ e sia $B = \mathbb{C}[t, z]$. Dimostrare che:

a) A si può immergere come sottoanello in B tramite la mappa f definita da

$$f(\overline{x}) = t^2 - 1$$
$$f(\overline{y}) = t^3 - t$$
$$f(\overline{z}) = z$$

b) A e B hanno lo stesso campo dei quozienti;

c) $I = (t+1, z-1)$ è ideale primo in B;

d) $J = (t^2 - 1, t^3 - t, z - 1)$ e $H = (t^3 - t - z(t^2 - 1), t^2 - z^2)$ sono ideali primi di A e $H \subseteq J$;

e) $I \cap A = J$

f) non esiste un ideale D primo tale che $D \cap A = H$ e $D \subseteq I$

Soluzione

a) Definisco l'omomorfismo $\varphi : \mathbb{C}[x, y, z] \longrightarrow \mathbb{C}[t, z]$ estendendo $\varphi(x) = t^2 - 1$, $\varphi(y) = t^3 - t$ e da $\varphi(z) = z$. Osservo che l'ideale $(y^2 - x^3 - x^2)$ è il nucleo di φ perché

$$\varphi(y^2 - x^3 - x^2) = t^2(t^2 - 1)^2 - (t^2 - 1)^2(t^2 - 1 + 1) = 0$$

Inoltre se un polinomio p appartiene al nucleo allora visto come polinomio in $\mathbb{C}[x, y][z]$ deve avere tutti i coefficienti nel nucleo, quindi posso supporre che $p \in \mathbb{C}[x, y]$ e $\deg_y(p) = 1$ a meno di sommarci un opportuno multiplo di $y^2 - x^3 - x^2$. Ma il polinomio $a(x)y - b(x)$ appartiene al nucleo se e solo se ci appartengono $a(x)$ e $b(x)$ ($\varphi(a(x)y)$ è un polinomio con solo monomi di grado dispari e $b(x)$ di grado dispari) se e solo se $a = 0$ e $b = 0$.

Di conseguenza l'omomorfismo $\tilde{\varphi} : A \longrightarrow B$ ottenuto per passaggio al quoziente è ben definito e iniettivo.

b) L'anello B è un dominio quindi esiste il campo delle frazioni. Osservo che in B vale $t = \frac{\overline{y}}{\overline{x}} \in Q(A)$ quindi ottengo che $B \subset Q(A) \subset Q(B)$. Essendo $Q(B)$ il più piccolo campo contenente B si ottiene l'uguaglianza $Q(A) = Q(B)$.

c) Osservo che ${}^{B}\!/_{I} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ con $t \mapsto -1$ e $z \mapsto 1$ e quindi l'ideale I è massimale e in particolare primo.

d) Sia $\tilde{J} = (x, y, z - 1) \subset \mathbb{C}[x, y, z]$ poichè $(y^2 - x^3 - x^2) \subset \tilde{J}$ passa al quoziente e si ottiene che $\varphi(\tilde{J}) = J \subset A$. Poiché $\tilde{J}$ è massimale per il nullstellensatz anche J è massimale (il passaggio al quoziente manda massimali in massimali). L'ideale H è l'immagine dell'ideale $\tilde{H} = (z^2 - x - 1, y - xz, y^2 - x^3 - x^2) = (x - z^2 + 1, y - z^3 + z)$ per passaggio al quoziente.

Noto che $H \subset J$ perché $t^3 - t - z(t^2 - 1) = \bar{y} - z\bar{x} \in J = (\bar{x}, \bar{y}, z - 1)$ e $t^2 - z^2 = (t^2 - 1) - (z + 1)(z - 1) \in J$.

L'ideale H, ottenuto da $\tilde{H}$ per passaggio al quoziente, è primo se e solo se è $\tilde{H}$ è primo, se e solo se $\mathbb{C}[x, y, z]/_{\tilde{H}}$ è un dominio. Si osserva che $\mathbb{C}[x, y, z]/_{\tilde{H}}$ è isomorfo a $\mathbb{C}[z]$ con l'isomorfismo $x \mapsto z^2 - 1$ e $y \mapsto z^3 - z$ che è un dominio, quindi H è primo.

e) Osservo che la contrazione di un primo è un primo, quindi $I \cap A = I^c$ è primo contenente J perché $(t + 1)(t - 1) = t^2 - 1$ in B. Nel punto d) avevo dimostrato che J era massimale in A quindi $J = I \cap A$.

f) Per assurdo suppongo che esiste un primo D contenuto in I la cui contrazione è H. Poichè $D \supset D^{ce} = H^e = (t+1, z-1)(t-1, z+1)(t-z)$ (essendo ideali primi chiamerò rispettivamente q_1, q_2 e q_3) per il secondo lemma di scansamento D contiene un q_i. Inoltre $I \supsetneq D = q_i$ (l'inclusione stretta è data dal fatto che $D^c \neq I^c$) e I non contiene q_2 e q_3 quindi l'unico caso possibile è che $D \supseteq q_1 = I$. Ho ottenuto l'assurdo che $D \supseteq I$ e $D^c \subsetneq I^c$ quindi un primo con le caratteristiche richieste non esiste.

Esercizio 3

Testo

Siano $A \subseteq B$ anelli, con B intero su A.

a) Dimostrare che se $x \in A$ è invertibile in B allora è invertibile anche in A.

b) Dimostrare che il radicale di Jacobson di A è la contrazione del radicale di Jacobson di B.

Soluzione

a) Sia $x \in A$ un elemento invertibile in B estensione intera di A, e chiamo $y \in B$ il suo inverso. Essendo y intero soddisfa una relazione della forma $y^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^i$ con i coefficienti a_i in A. Moltiplico l'equazione per x^{n-1}:

$$y = y^n x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{n-i-1} \in A$$

Ciò dimostra che l'inverso appartiene ad A.

b) Dimostro che $J(A) \subset J(B)^c$:

Sia $x \in J(B) \cap A$ un elemento nella contrazione del radicale di Jacobson di B, è noto che $1 + bx \in B^*$ per ogni $b \in B$ (questa è una caratterizzazione del radicale di Jacobson). In particolare per ogni $a \in A$ si ha che $1 + ax \in B^*$ e per il pundo a) l'elemento $1 + ax$ è invertibile in A. In conclusione $1 + ax \in A^*$ per ogni $a \in A$ implica che $x \in J(A)$.

Viceversa mostro che $J(A) \supset J(B)^c$, dimostrando la contronominale:

Sia $x \notin J(B)^c$ un elemento di A allora x non appartiene ad un ideale massimale M. La sua contrazione $m = M^c$ è ancora un ideale massimale e $x \notin m$ perciò $x \notin J(A)$.

Esercizio 4

Testo

Sia A un sottoanello dell'anello B, e sia C la chiusura integrale di A in B. Siano f, g polinomi monici in $B[X]$ tali che $fg \in C[X]$.

a) Dimostrare che esiste un anello D tale che $B \subseteq D$ e entrambi i polinomi f e g si fattorizzano in $D[X]$ come prodotto di fattori di grado 1.

b) Dimostrare che f e g appartengono a $C[X]$.

Soluzione

a) Osservo che se il prodotto di due polinomi è un polinomio monico allora i due polinomi erano, a meno di invertibili, monici. Sia p un qualunque polinomio monico irriducibile a coefficienti in un anello B di grado maggiore di uno, e considero i seguenti omomorfismi:

$$B \hookrightarrow B[y] \xrightarrow{\varphi} B[y]/_{(p(y))}$$

Chiamo il quoziente D e voglio mostrare che $\ker \varphi \cap B = 0$. Sia $b \in B$ tale che $\varphi(b) = 0$, cioè $b \in (p(y))$ quindi esiste $q \in B[y]$ tale che $b = p(y)q(y)$. Guardando il grado in y dei polinomi e usando il fatto che p è monico si ottiene che $0 = \deg b = \deg p + \deg q$ (se $b \neq 0$) da cui l'assurdo $\deg p = 0$. Il polinomio $p \in B[x] \subset D[x]$ ha una radice in D, infatti $p(y) = 0$, di conseguenza il polinomio $x - y$ divide $p(x)$ in $D[x]$ ($x - y$ è monico quindi posso usare l'algoritmo di divisione e il resto è zero). Ho trovato quindi un estensione D di B in cui il polinomio p si fattorizza come prodotto di polinomi irriducibili di grado minore. Per induzione sul grado posso costruire un'estensione di anelli in cui i polinomi f e g si fattorizzano come prodotto di polinomi monici di grado uno.

b) Sia E la chiusura integrale di A in D, la tesi è equivalente a dimostrare che $f, g \in E[x]$ perché $E[x] \cap B[x] = C[x]$. Il polinomio f si scompone come $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - d_i)$ (posso supporre i fattori di grado uno monici per quanto notato nel primo punto). Calcolo $f \cdot g$ in d_i e ottengo $(f \cdot g)(d_i) = 0$ che implica d_i interi su A cioè appartenenti ad E. Essendo E un anello e i coefficienti di f combinazioni dei d_i si ha $f \in E[x]$ quindi la tesi.

Esercizio 5

Testo

Dimostrare che, dato un numero intero $d < -2$ libero da quadrati e congruo a 2 o a 3 modulo 4, l'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ non è a ideali principali.

Soluzione

Innanzitutto ricordo che $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ è munito di un modulo dato da

$$\left|a + b\sqrt{d}\right| = a^2 - db^2$$

Nel caso d negativo, il modulo è nullo se e solo se l'elemento è nullo ($a = b = 0$), inoltre è moltiplicativo.

Osservo che 2 è irriducibile in $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ perché se $a+b\sqrt{d} \mid 2$ allora $a^2 - db^2 \mid 4$ e di conseguenza la disuguaglianza $a^2 - db^2 \leq 4$ dice che $b = 0$ (perché $-d > 4$) e $a = 1, 2$.

Dimostro che $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ non è UFD quindi non è PID distinguendo due casi:

$d \equiv 3$) Considero il prodotto $(1 + \sqrt{d})(1 - \sqrt{d}) = 1 - d$ e osservo che $2 \mid 1 - d$. Noto che $2 \nmid 1 \pm \sqrt{d}$ perché $4 \nmid 1 - d$ quindi 2 è irriducibile ma non primo e di conseguenza $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ non è UFD.

$d \equiv 2$) Considero il prodotto $(2 + \sqrt{d})(2 - \sqrt{d}) = 4 - d$ e osservo che $2 \mid 4 - d$. Noto che $2 \nmid 2 \pm \sqrt{d}$ perché $4 \nmid 4 - d$ quindi 2 è irriducibile ma non primo e di conseguenza $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ non è UFD.

Esercizio 6

Testo

Si considerino due anelli $A \subseteq B$ e sia B un A-modulo finitamente generato. Dimostrare che, dato un ideale primo I di A, gli ideali primi Q di B tali che $Q \cap A = I$ sono un numero finito.

Soluzione

Per prima cosa quoziento A per l'ideale I e B per l'ideale I^e e ottengo l'immersione ${}^{A}\!/\!{}_{I} \hookrightarrow {}^{B}\!/\!{}_{I^e}$ e ho corrispondenza biunivoca tra i primi di B che contengono I^e e i primi di ${}^{B}\!/\!{}_{I^e}$. L'estensione di anelli è finitamente generata e mostro che ogni primo Q contiene I^e infatti $Q \supset Q^{ce} = I^e$. Mi basta dimostrare il teorema nel caso particolare del primo $I = 0$ e quindi A dominio.

Sia $S = A \setminus \{0\}$ e $K = S^{-1}A$ il campo dei quozienti di A. L'anello $S^{-1}B$ è una K-algebra finita e i primi di B che non intersecano S sono in corrispondenza biunivoca coi primi di $S^{-1}B$. Inoltre se $Q^c = 0$ allora $Q^c \cap S = 0 \cap S = \emptyset$, quindi posso supporre A un campo.

Voglio dimostrare che una K-algebra finita B ha solo finiti ideali primi. Sia $\mathcal{N}(B) = \bigcap_{p\ primo} p$ il nilradicale di B. Poiché B è un K-spazio vettoriale di dimensione finita e $\mathcal{N}(B)$ un sottospazio allora è intersezione finita di ideali (sottospazi vettoriali):

$$\mathcal{N}(B) = \bigcap_{i \leq n} p_i$$

Sia p un qualsiasi primo di B allora $p \supset \mathcal{N}(B) = \bigcap p_i$ e per il lemma di scansamento si ottiene che esiste un indice i tale che $p \supset p_i$. Osservo che B è un estensione intera di K perché K-modulo finitamente generato, quindi $p^c = 0 = p_i^c$ e $p \supset p_i$ implica che $p = p_i$. Ciò dimostra che B ha finiti ideali primi e quindi la tesi.

Esercizio 7

Testo

Si consideri l'anello di polinomi $\mathbb{C}[X, Y, Z]$ graduato nella maniera standard. Si considerino gli ideali (graduati) $I_1 = (X^3 + Y^3 + Z^3)$ e $I_2 = (X^3 + Y^3 + Z^3, X^2 + Y^2 + Z^2)$. Si calcolino le serie di Poincaré

$$P(I_1, t), \quad P(I_2, t), \quad P\left(\frac{\mathbb{C}[X, Y, Z]}{I_1}, t\right), \quad P\left(\frac{\mathbb{C}[X, Y, Z]}{I_2}, t\right)$$

dove la funzione 'lunghezza' λ è data da $\dim_{\mathbb{C}}$.

Soluzione

Denoto l'ideale I_1 con I, l'ideale I_2 con J e l'anello $\mathbb{C}[x, y, z]$ con A. Determino il coefficiente n-esimo della serie $P(I, t)$ calcolando la dimensione su $\mathbb{C}$ di I_n. Ogni polinomio in I_n si scrive in modo unico come

$$(x^3 + y^3 + z^3)p(x, y, z)$$

con p un qualsiasi polinomio in A_{n-3} quindi $\dim_{\mathbb{C}} I_n = \dim_{\mathbb{C}} A_{n-3}$. Calcolo la dimensione di A_n, una base è $\{x^a y^b z^c \mid a+b+c=n\}$ e la sua cardinalità è $\binom{n+2}{2}$. Di conseguenza $dim_{\mathbb{C}} I_n = \binom{n-1}{2}$ per $n > 0$ e la serie è

$$P(I,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n-1}{2} t^n$$

Calcolo la serie di Poincaré di J, trovando una formula per $\dim_{\mathbb{C}} J_n$. Il generato da $x^3+y^3+z^3$ intersecato A_n è un $\mathbb{C}$ spazio vettoriale di dimensione finita $\binom{n-1}{2}$ come il generato da $x^2+y^2+z^2$ intersecato A_n di dimensione $\binom{n}{2}$. Calcolo la dimensione di I_n con la formula di Grassmann, osservando che i due polinomi sono coprimi:

$$\begin{aligned}\dim I_n &= \dim A_{n-3} + \dim A_{n-2} - \dim A_{n-5} = \\ &= \binom{n-1}{2} + \binom{n}{2} - \binom{n-3}{2} = \\ &= \frac{n^2+3n-10}{2}\end{aligned}$$

Chiamerò questi coefficienti b_n per $n > 2$, per $n = 2$ si ha che $b_2 = 1$ e tutti quelli inferiori sono nulli. La serie è $P(J,t) = t^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2+3n-10}{2} t^n$.

Per calcolare le altre due serie osservo che date le successioni esatte corte di A-moduli graduati

$$0 \longrightarrow I_n \longrightarrow A_n \longrightarrow {}^{A_n}\!/_{I_n} \longrightarrow 0$$

Determina la relazione sulle serie di Poincaré relative:

$$P(I,t) + P\left({}^{A}\!/_{I}, t\right) = P(A,t)$$

Quindi usando il fatto dimostrato prima che la serie di Poincaré di A è $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+2}{2} t^n$ ottengo le serie di $P\left({}^{A}\!/_{I}, t\right)$ e di $P\left({}^{A}\!/_{J}, t\right)$.

$$P\left({}^{A}\!/_{I}, t\right) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 3nt^n$$

$$P\left({}^{A}\!/_{J}, t\right) = 1 + 3t + 5t^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} 6t^n$$

Esercizio 8

Testo

Sia A un anello completo rispetto alla topologia indotta da un ideale I. Sia (a_n) una successione in A. Dimostrare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge se e solo se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Soluzione

Supponiamo che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converga ad un elemento a. Sostituendo ad a_0 il valore $a_0 - a$ la nuova serie converge a 0 e il $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ se e solo se esiste ed è zero il limite della nuova successione. Per ogni k esiste N tale che per ogni $n \geq N$ la somma parziale $\sum_{i=0}^{n} a_i \in I^k$. Dimostro che ogni a_n per $n > N$ appartiene ad I^k, infatti $a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \in I^k$. Poiché ciò è vero per ogni k (la soglia N dipende da k), la successione degli a_n ha limite uguale a zero.

Viceversa supponendo che la successione a_n ha limite nullo allora per ogni k, allora esiste N_k tale che per ogni $n \geq N_k$ il termine a_n appartiene ad I^k. Ciò implica che è ben definito l'elemento $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \equiv \sum_{n=0}^{N_k} a_n$ modulo I^k. Sia $a = (\sum_{n=0}^{N_0} a_n, \sum_{n=0}^{N_1} a_n, \ldots, \sum_{n=0}^{N_k} a_n, \ldots) \in A$ si verifica che la successione è coerente e voglio dimostrare che a è il limite della serie. Infatti per ogni k le serie parziali $\sum_{n=0}^{N_k} a_n$ tendono ad a:

$$\sum_{n=0}^{N_k} a_n - a \in I^k$$

Quindi la serie è convergente e tende ad a.

Esercizio 9

Testo

Sia A un dominio e I un ideale di A. Denotiamo con $\mathrm{gr}_I(A)$ l'anello graduato associato ad A rispetto alla filtrazione indotta da I e con $\hat{A}_I$ il completamento di A rispetto alla topologia I-adica.

a) È vero o falso che A dominio implica $\mathrm{gr}_I(A)$ dominio? E il viceversa?

b) A lezione abbiamo visto che non è vero che A dominio implica $\hat{A}_I$ dominio. E il viceversa?

Soluzione

a) Se A è dominio e I un ideale non primo allora esistono due elementi $a, b \in A \setminus I$ tali che $ab \in I$. Prendendo $\bar{a} \in A/I$ e $\bar{b} \in A/I$ e ricordando che $\mathrm{gr}_I(A)$ contiene A/I si ha che $\bar{a}\bar{b} = 0$ in $\mathrm{gr}_I(A)$. Quindi non è sempre vero che $\mathrm{gr}_I(A)$ è un dominio.

   Sia $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ e $I = (3)$, si ha che $\mathrm{gr}_I(A) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus 3\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \ldots$ perché $I^k = (3) = I$ per ogni $k > 1$. Ho costruito un controesempio in cui $\mathrm{gr}_I(A) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ è un dominio ma A non è dominio.

b) Lo stesso esempio funziona per il completamento.

Infatti $\hat{A}_I = \varprojlim A/I^k \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ che è un dominio, ma A non lo era.

Esercizio 10

Si ringrazia Carlo Sircana per aver prodotto (in collaborazione con altri amici) la soluzione del seguente esercizio e di averla scritta in LaTeX.

Testo

Sia A un anello locale noetheriano con ideale massimale m e sia q un ideale m-primario. Allora $\dim(A) = \dim(Gr_q(A))$.

Soluzione

Innanzitutto, abbiamo necessità di indagare sulla natura dei primi minimali del graduato.

Definizione 1. Sia B un anello graduato e sia I un ideale di B; definiamo

$$I^h = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I \cap B_i$$

I^h è per definizione un ideale omogeneo ed è il più grande ideale omogeneo contenuto in I.

Lemma 2. *Sia B un anello graduato e sia I un ideale omogeneo. Supponiamo che per ogni a, b elementi omogenei, valga $ab \in I \Rightarrow a \in I \ \vee \ b \in I$. Allora I è un ideale primo.*

Dimostrazione. Consideriamo $x, y \in B$; possiamo scrivere x, y come somma delle loro componenti omogenee

$$x = a_{i_0} + a_{i_1} + \cdots + a_{i_n} \qquad\qquad y = b_{j_0} + b_{j_1} + \cdots + b_{j_m}$$

dove a_{i_k}, b_{j_k} sono omogenei. Possiamo supporre che a_{i_0} e b_{j_0} non stiano in I e che $xy \in I$.

$$xy = a_{i_0} b_{j_0} + \cdots + a_{i_n} b_{j_m}$$

Dato che I è omogeneo, ogni componente del prodotto deve appartenere a I; dato che per gli elementi omogenei $ab \in I$ implica $a \in I$ o $b \in I$, questo deve valere anche per a_{i_0} e b_{j_0}, da cui una contraddizione. $\square$

Lemma 3. *Sia B un anello graduato e sia I un ideale di B. Se I è un ideale primo, allora I^h è un ideale primo.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in B$ omogenei tali che $xy \in I^h$; allora in particolare $xy \in I$, da cui $x \in I$ oppure $y \in I$ per primalità di I. Dato che x, y sono omogenei, necessariamente $x \in I^h$ oppure $y \in I^h$, dunque I^h è primo. □

Proposizione 4. *Sia B un anello graduato e sia P un primo minimale di B. Allora P è omogeneo.*

Dimostrazione. Sia P un primo minimale B; allora $P^h \subseteq P$ è un primo di B. Per minimalità di P, $P = P^h$. □

Restringiamoci ora al caso particolare dell'anello graduato.

$$Gr_q(A) = A/q \oplus q/q^2 \oplus q^2/q^3 \oplus \dots$$

Quozientando per un qualsiasi ideale primo minimale I, si ottiene un dominio graduato; dato che un sottoanello di un dominio è un dominio, in particolare questo deve valere per il sottoanello degli elementi di grado 0. Visto che l'anello A/q è locale di dimensione 0, il quoziente $Gr_q(A)/I$ è una K-algebra finitamente generata che è anche un dominio; tutti gli ideali massimali hanno allora la stessa altezza per catenarietà. Questo vale per ogni ideale minimale di $Gr_q(A)$, dunque è sufficiente calcolare l'altezza dell'ideale omogeneo

$$P = m/q \oplus q/q^2 \oplus q^2/q^3 \oplus \dots$$

che contiene tutti i primi minimali, perchè questi ultimi sono omogenei. Per calcolare questo, localizziamo $Gr_q(A)$ rispetto all'ideale P e calcoliamo il graduato rispetto all'ideale

$$Q = (0 \oplus q/q^2 \oplus q^2/q^3 \oplus \dots)^e$$

Otteniamo quindi

$$Gr_{Q^e}((Gr_q(A))_P) = (Gr_q(A))_P/Q^e \oplus Q^e/(Q^e)^2 \oplus \dots$$

Sorprendentemente,

$$(Gr_q(A))_P/Q^e \simeq A/q$$

e per ogni termine

$$(Q^e)^n/(Q^e)^{n+1} \simeq q^n/q^{n+1}$$

da cui l'isomorfismo

$$Gr_{Q^e}((Gr_q(A))_P) \simeq Gr_q(A)$$

Dato che $\dim(A) = d(Gr_q(A))$ e $\dim((Gr_q(A))_P) = d(Gr_{Q^e}((Gr_q(A))_P)) = d(Gr_q(A))$, si ottiene la tesi.

Esercizio 11

Testo

Si consideri l'anello $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$. Dimostrare che l'ideale $m = (2, 1 + \sqrt{-3})$ è massimale. L'anello locale A_m è regolare?

Soluzione

L'anello A è isomorfo a $\mathbb{Z}[x] \diagup (x^2 + 3)$ e l'ideale m generato da $(2, 1+x) \supset (x^2 + 3)$ è massimale perché è massimale in $\mathbb{Z}[x]$ $(\mathbb{Z}[x] \diagup (2, 1 + x) \simeq \mathbb{F}_2)$.

La dimensione di A_m è minore o uguale della dimensione di A che è minore stretto della dimensione di $\mathbb{Z}[x]$ perché l'ideale $(x^2 + 3)$ è principale e $\mathbb{Z}[x]$ è un dominio. Sapendo che la dimensione di $\mathbb{Z}[x]$ è due e che $m \supsetneq 0$ ideali primi in A_m si conclude che la dimensione di A_m è uno.

Mostro che A_m non è regolare perché l'ideale massimale è generato da almeno due elementi. Se per assurdo fosse generato da un solo elemento p si avrebbe che $p\frac{a}{s} = 2$ e che $p\frac{b}{t} = 1 + \sqrt{-3}$. Poiché $m = (p)$ è massimale e $s \notin m$ le uguaglianze sopra si riscrivono $p\frac{a'}{1} = 2$ e $p\frac{b'}{1} = 1 + \sqrt{-3}$. Leggendo le uguaglianze in A si ottiene che $pa' = 2$ e $pb' = 1 + \sqrt{-3}$ e si deduce che $|p||4$. Inoltre vale che $2^2 = (1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3})$ e poiché sia 2 che $1 - \sqrt{-3}$ non sono invertibili in A_m non è possibile che $|p|$ sia 4.

Infine $|p|$ non può essere uno altrimenti p sarebbe invertibile in A e non può essere 2 perché l'equazione in $\mathbb{Z}$ $a^2 + 3b^2 = 2$ non ha soluzioni.

Concludo che un tale p non esiste e quindi m non può essere regolare.

Esercizio 12

Testo

Sia A la localizzazione di $\mathbb{Z}[x, y]$ nell'ideale massimale $(5, x - 1, y + 2)$ e sia $B = A/(x^2 + y^2 + 4y - 3x + 6)$. Stabilire se B è un anello regolare.

Soluzione

La dimensione di A è tre perché è minore o uguale alla dimensione di $\mathbb{Z}[x, y]$ e maggiore di tre perché $I = (5, x - 1, y + 2) \supsetneq (5, x - 1) \supsetneq (5) \supsetneq (0)$.

La dimensione di B è due perché A è dominio noetheriano e l'ideale per cui si quozienta è principale.

Dimostro che l'ideale massimale $I \subset B$ è generato da due elementi. Osservo che vale $x^2+y^2+4y-3x+6 = (x-1)(x-2)+(y+2)^2$ e che $x-2 \notin I$ quindi invertibile in B. Possiamo riscrivere $x - 1 = -(x - 2)^{-1}(y + 2)^2$ in B e quindi I è generato da due elementi 5 e $y + 2$.

Ho dimostrato che B è regolare.

Esercizio 13

Testo

Sia A un dominio noetheriano locale con ideale massimale m. Sia $B = A[X]_q$ dove q è un ideale primo di $A[X]$ tale che $m[X] \subset q$. Dimostrare che

$$dim\ B = dim\ A + 1 - tr_{deg} k'/k$$

dove $k = A/m$ e k' è il campo residuo di B (e $k \subset k'$ in modo ovvio).

Soluzione

Calcolo il grado di trascendenza di k' su k osservando che $k' = {}^{A[x]_q}\!/_{q} \simeq Q\left({}^{A[x]}\!/_{q}\right)$. Inoltre ${}^{A[x]}\!/_{q} = {}^{A[x]/m[x]}\!/_{q/m[x]} = {}^{k[x]}\!/_{\bar{q}}$ dove $\bar{q}$ è l'immagine di q in $k[x]$.

Osservo che il grado di trascendenza è uno se e solo se $\bar{q} = 0$ cioé $q = m[x]$.

Voglio usare il teorema tella fibra su $A \hookrightarrow B$ dato che A e B sono anelli locali noetheriani e l'immersione è locale perché $m[x] \subseteq q$. Poiché $A[x]$ è A-modulo piatto la mappa $A \to A[x]$ è piatta e di conseguenza anche la composizione con la localizzazione è piatta $A \to B$. Ho quindi che

$$\dim B = \dim A + \dim {}^{B}\!/_{mB}$$

Mostro l'uguaglianza $\dim {}^{B}\!/_{mB} = 1 - \mathrm{tr_{deg}}\, {}^{k'}\!/_{k}$. Se $q = m[x]$ allora ${}^{A[x]_q}\!/_{q}$ è un campo e la sua dimensione sarebbe 0 e l'uguaglianza vera. Altrimenti $q \supsetneq m[x]$ che induce una catena di primi $\bar{q} \supsetneq 0$ in ${}^{B}\!/_{mB}$ e ci garantisce che la dimensione è almeno uno. La dimensione è esattamente uno perché ${}^{B}\!/_{mB} = \left({}^{A[x]}\!/_{m[x]}\right)_{\bar{q}} = (k[x])_{\bar{q}}$ e quindi pensando la dimensione come la lunghezza delle catene si ottiene $\dim {}^{B}\!/_{mB} \leq \dim k[x] = 1$.

Si conclude che luguaglianza vale in entrambi i casi e quindi la tesi.

Esercizio 14

Testo

Consideriamo l'ideale $I = (2, x)$ in $\mathbb{Z}[X]$. Trovare un omomorfismo di $\mathbb{Z}[X]$ moduli da I a $\mathbb{Q}[X]/\mathbb{Z}[X]$ che non si estende a tutto $\mathbb{Z}[X]$ (Dunque lo $\mathbb{Z}[X]$ modulo $\mathbb{Q}[X]/\mathbb{Z}[X]$ non è iniettivo).

Soluzione

Definisco la mappa di $Z[x]$ moduli come $\varphi(2) = 0$ e $\varphi(x) = \frac{1}{2}$ ed estendendo per linearità a tutto $(2, x)$. Verifico la buona definizione su $(2) \cap (x) = (2x)$ infatti $0 = x\varphi(2) = \varphi(2x) = 2\varphi(x) = 2\frac{1}{2} = 0$.

Se esistesse un estensione ψ sarebbe determinata da $\psi(1) = a$ con le condizioni $2a = 0$ e $xa = \frac{1}{2}$. La seconda condizione non è mai verificata perché xa ha grado almeno uno in ${}^{\mathbb{Q}}\!/\!_{\mathbb{Z}}[x]$ (x è monico) mentre $\frac{1}{2}$ è costante.

Esercizio 15

Testo

Sia $\mathcal{B}$ la categoria i cui oggetti sono gli insiemi finiti e i cui morfismi sono le bigezioni. Sia $\mathcal{S}$ la categoria degli insiemi. Consideriamo i seguenti due funtori, *Sym* e *Ord*, da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{S}$. Per ogni oggetto X di $\mathcal{B}$, $\mathit{Sym}(X)$ è l'insieme di tutti gli ordini totali che si possono mettere in X (=liste ordinate di lunghezza uguale alla cardinalità di X). Per ogni morfismo $f \in \mathcal{B}[X, Y]$, $\mathit{Sym}(f)$ è il morfismo che manda $\sigma \in \mathit{Sym}(X)$ in $f \circ \sigma \circ f^{-1} \in \mathit{Sym}(Y)$ e $\mathit{Ord}(f)$ è il morfismo che manda la lista $(x_1, x_2, \dots)$ nella lista $(f(x_1), f(x_2), \dots)$.

Verificare che *Sym* e *Ord* sono ben definiti. Sono naturalmente equivalenti?

Soluzione

Osservo che *Sym* è un funtore perché manda per ogni insieme finito X l'identità nell'identità e vale che $(gf) \circ \sigma \circ (gf)^{-1} = g \circ (f \circ \sigma \circ f^{-1}) \circ g^{-1}$ e il funtore rispetta la composizione.

Lo stesso vale per *Ord*: $\mathit{Ord}(\mathrm{Id}_X)(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$ cioé manda l'identità nell'identità e si verifica facilmente che $\mathit{Ord}(gf) = \mathit{Ord}(g)\mathit{Ord}(f)$.

Mostro che i due funtori non sono naturalmente equivalenti, in particolare non esiste una trasformazione naturale tra *Sym* e *Ord*. Se per assurdo esistesse una trasformazione α prendo l'insieme finito $X = \{x, y\}$ e la bigezione dell'insieme in sé tale che $f(x) = y$ e $f(y) = x$.

La condizione di funtore implica che $\alpha_X \circ \mathit{Sym}(f) = \mathit{Ord}(f) \circ \alpha_X$ e valutando in $\sigma \in \mathcal{S}$ che scambia x e y si ottiene $\alpha_X(f \circ \sigma \circ f^{-1}) = f(\alpha_X(\sigma))$. Noto che $f \circ \sigma \circ f^{-1} = \sigma$ e quindi si deve avere che $\alpha_X(\sigma) = f(\alpha_X(\sigma))$ di conseguenza non può esistere una trasformazione naturale.

Esercizio 16

Testo

Descrivere le classi di equivalenza di estensioni di $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ tramite $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$ (mostrando per ciascuna un rappresentante).

Soluzione

Per descrivere le estensioni di $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ tramite $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$ modulo equivalenza uso il risultato visto a lezione che mette in corrispondenza le estensioni con $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \simeq \mathrm{Tor}(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/28\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/28\mathbb{Z})/\operatorname{Im}\mu^*$ dove μ è la mappa data da una presentazione proiettiva di $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Come risoluzione proiettiva scelgo $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}} \to 0$ dove μ è la moltiplicazione per 12.

Identificando $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/28\mathbb{Z})$ con $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$ nel modo standard le estensioni sono in corrispondenza con $\frac{\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}}{\operatorname{Im}\mu^*}$. Essendo 3 invertibile in $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$ si ottiene che le mappe inducono estensioni equivalenti se e solo se sono congrue modulo 4.

Le estensioni sono quattro e si ottengono al variare di n dal seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\cdot n"'] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "1\mapsto(0,1)"'] & \mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}/_{28\mathbb{Z}} \arrow[r, "1\mapsto(1,0)"'] & \frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}{\langle(28,0),(-n,12)\rangle} \arrow[r, "(1,0)\mapsto 0", "(0,1)\mapsto 1"'] & \mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dove ho usato il fatto che il push out è isomorfo a

$$\frac{\mathbb{Z}/_{28\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}}{\langle(-n,12)\rangle} \simeq \frac{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\langle(28,0),(-n,12)\rangle}$$

Ora per ogni n in classi di equivalenza diverse $(-1, 0, 1\ e\ 2)$ calcolo la forma di Smith della matrice $\left(\begin{smallmatrix} -n & 28 \\ 12 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ed esibisco le estensioni.

$n = 0$) la matrice a meno di permutazione è nella forma $\left(\begin{smallmatrix} 28 & 0 \\ 0 & 12 \end{smallmatrix}\right)$ e si ottiene la seguente estensione e le stesse mappe del diagramma generale.

$$\begin{tikzcd}
& \arrow[d] & \\
 \arrow[r] & \mathbb{Z}/28\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \arrow[r] &
\end{tikzcd}$$

$n = 2$) Applico l'algoritmo:

$$\begin{pmatrix} -2 & 28 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 := r_2 + 6r_1} \begin{pmatrix} -2 & 28 \\ 0 & 168 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 := c_2 + 14c_1} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 168 \end{pmatrix}$$

Ottengo così l'estensione

$$\begin{tikzcd}
& \arrow[d, "1\mapsto(0,1)"'] & \\
 \arrow[r, "1\mapsto(1,6)"] & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/168\mathbb{Z} \arrow[r, "(1,0)\mapsto 6", "(0,1)\mapsto 1"'] &
\end{tikzcd}$$

$n = 1)$ Applico l'algoritmo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 28 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 := r_2 + 12 r_1} \begin{pmatrix} -1 & 28 \\ 0 & 336 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 := c_2 + 28 c_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 336 \end{pmatrix}$$

Ottengo così l'estensione

$$\begin{tikzcd} & {} \arrow[d, "1 \mapsto 1"] & \\ {} \arrow[r, "1 \mapsto 12"] & \mathbb{Z}/336\,\mathbb{Z} \arrow[r, "1 \mapsto 1"] & {} \end{tikzcd}$$

$n = -1)$ Applico l'algoritmo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 28 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 := r_2 - 12 r_1} \begin{pmatrix} 1 & 28 \\ 0 & 336 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 := c_2 - 28 c_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 336 \end{pmatrix}$$

Ottengo così l'estensione

$$\begin{tikzcd} & {} \arrow[d, "1 \mapsto 1"] & \\ {} \arrow[r, "1 \mapsto -12"] & \mathbb{Z}/336\,\mathbb{Z} \arrow[r, "1 \mapsto 1"] & {} \end{tikzcd}$$

Esercizio 17

Testo

Enunciare e dimostrare i lemmi duali dei lemmi 28 e 29 (pagina 45 dispense di Giacomo d'Antonio).

Soluzione

Enuncio e dimostro un utile lemma.

Lemma 5. *Dato il diagramma commutativo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ D \arrow[r] & E \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

1. *Se il quadrato grande è un push out allora il quadrato a destra è un push out.*

2. *Se i due quadrati a destra e sinistra sono push out allora lo è anche il quadrato grande.*

Dimostrazione. 1. Dati un oggetto G e due frecce $\varphi : C \to G$ e $\psi : E \to G$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \arrow[rdd, bend left, "\varphi"] & \\
D \arrow[r, "\delta"] & E \arrow[r] \arrow[rrd, bend right, "\psi"'] & F \arrow[rd, dashed, "\theta"] & \\
 & & & G
\end{tikzcd}$$

considero la composizione $\psi \circ \delta$ e la mappa φ e uso la proprietà universale del push out. Esiste unica mappa $\theta : F \to G$ tale che il diagramma commuta. In particolare la mappa θ trovata soddisfa la proprietà universale richiesta, quindi il quadrato a destra è un push out.

2. Dati un oggetto G e due frecce $\varphi : C \to G$ e $\psi : D \to G$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & C \arrow[d] \arrow[rdd, bend left, "\varphi"] & \\
D \arrow[r] \arrow[rrrd, bend right, "\psi"'] & E \arrow[r] \arrow[rrd, dashed, "\xi"] & F \arrow[rd, dashed, "\theta"] & \\
 & & & G
\end{tikzcd}$$

considero il push out a sinistra e le due mappe $\varphi \circ \beta$ e ψ. Esiste un unica mappa $\xi : E \to G$ tale che il diagramma commuti. Per la proprietà del push out di destra le due mappe φ e ξ si fattorizzano in modo unico tramite la mappa $\theta : F \to G$. Quest'ultima mappa è unica che soddisfa la proprietà del push out perché ogni altra mappa con le stesse proprietà è univocamente determinata da ξ e φ che a loro volta sono determinate da φ e ψ. Si conclude che anche il quadrato grosso è un push out.

$\square$

Noto che l'isomorfismo tra il push out del diagramma grande e quello a destra è indotto dalla mappa δ. E' utile pensare il coker come push out di un diagramma.

Lemma 6. *Il push out del seguente diagramma è il* $\operatorname{coker} \alpha$ *con la proiezione* π

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \arrow[d, dashed] \\
B \arrow[r, dashed] & \operatorname{coker} \alpha
\end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Data $\varphi : B \to C$ una mappa tale che il diagramma commuta si deve avere che $\varphi \circ \alpha = 0$ e quindi la mappa φ passa al $\operatorname{coker} \alpha$ in modo unico. Di conseguenza il diagramma è un push out. $\square$

Tornando all'esercizio enuncio il duale della proposizione 28.

Proposizione 7 (28*). *Dato il seguente push out, vale che:*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & X \end{tikzcd}$$

1. *la mappa β induce isomorfismo tra* $\operatorname{coker} \psi$ *e* $\operatorname{coker} \alpha$.
2. *se ψ è iniettiva allora α è iniettiva.*

Dimostrazione. 1. Considero il diagramma

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \arrow[d] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & X \arrow[r] & \operatorname{coker} \psi \end{tikzcd}$$

Il diagramma grande è un push out per il lemma 6 e usando il lemma 5 ottengo che il quadrato a destra è un push out. L'isomorfismo tra i push out è proprio quello dato da β (nel lemma si chiamava δ) e il push out del quadrato a destra è per il lemma 6 $\operatorname{coker} \alpha$. In altre parole β induce isomorfismo tra i due coker.

2. Per quanto visto a lezione il push out è isomorfo al prodotto dei due moduli quozientato per il sottomodulo $\langle \psi, -\varphi \rangle$. L'intera proposizione è invariante per isomorfismo quindi lo dimostro in questo caso specifico e ciò implica il caso generale.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & A \arrow[d, "\alpha'"] \\ B \arrow[r, "\beta'"'] & \frac{B \oplus A}{\langle \psi, -\varphi \rangle} \end{tikzcd}$$

Il nucleo di α' è l'insieme $\{a \in A \mid \exists r \in R \quad (0, a) = (\psi(r), \varphi(r))\}$. Per iniettività di ψ l'unico r possibile è 0 quindi $\ker \alpha' = 0$.

$\square$

Enuncio e dimostro la seconda parte dell'esercizio.

Proposizione 8 (29*)**.** *Date due successioni esatte corte come da diagramma*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "\zeta"'] & E' \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\xi"'] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"'] & E \arrow[r, "\pi"'] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

allora E è il push out di A e E' tramite A'.

Dimostrazione. Sia X il push out di A e E' con le mappe $\alpha : A \to X$ e $\beta : E' \to X$. Per l'esercizio precedente essendo i' iniettiva la mappa α è iniettiva, inoltre la mappa β induce un isomorfismo φ tra $B \simeq \operatorname{coker} i'$ e $\operatorname{coker} \alpha$ che fa commutare il diagramma. Ottengo così la seconda successione esatta corta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "\zeta"'] & E' \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\beta"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"'] & X \arrow[r] & \operatorname{coker} \alpha \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Le mappe ξ e i fanno scattare le ipotesi della proprietà universale del push out e quindi si fattorizzano con $\theta : X \to E$. Il fatto che fattorizzano le mappe implica che il diagramma in basso a sinistra è commutativo.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A' \arrow[rr, "i'"] \arrow[dr, "\zeta"] \arrow[dd, "\zeta"'] & & E' \arrow[rr, "\pi'"] \arrow[dr, "\xi"] \arrow[dd, "\beta"'] & & B \arrow[r] \arrow[dd, "\varphi"] & 0 \\
& 0 \arrow[r] & A \arrow[rr, "i"] \arrow[dl, equal] & & E & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[rr, "\alpha"'] & & X \arrow[rr, "p"'] \arrow[ur, "\theta"'] & & \operatorname{coker} \alpha \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Completo la successione esatta corta con B e il diagramma (in basso a destra) che ottengo tramite π e φ^{-1} è commutativo. Questo perché si può scrivere X come somma di $\operatorname{Im} \alpha$ e $\operatorname{Im} \beta$ e quindi basta controllare che $\pi \circ \theta \circ \alpha = 0$ e che $\pi \circ \theta \circ \beta = \varphi^{-1} \circ p \circ \beta$. Infatti $\pi \circ \theta \circ \alpha = \pi \circ i = 0$ e $\pi \circ \theta \circ \beta = \pi \circ \xi = \pi' = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \pi' = \varphi^{-1} \circ p \circ \beta$.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr] & & A' \arrow[rr, "i'"] \arrow[dr, "\zeta"] \arrow[dd, "\zeta"'] & & E' \arrow[rr, "\pi'"] \arrow[dr, "\xi"] \arrow[dd, "\beta"'] & & B \arrow[rr] \arrow[dr, equal] \arrow[dd, "\varphi"'] & & 0 & \\
& 0 \arrow[rr] & & A \arrow[rr, "i"] & & E \arrow[rr, "\pi"] & & B \arrow[rr] & & 0 \\
0 \arrow[rr] & & A \arrow[rr, "\alpha"'] \arrow[ur, equal] & & X \arrow[rr, "p"'] \arrow[ur, "\theta"'] & & \operatorname{coker}\alpha \arrow[rr] \arrow[ur, "\varphi^{-1}"'] & & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Essendo il diagramma commutativo e le successioni esatte posso applicare il lemma dei cinque e affermare che l'omomorfismo θ è un isomorfismo e quindi E è un push out. $\square$