Esercizi di teoria degli schemi

Roberto Pagaria

21 dicembre 2014

Esercizio 1

Testo

Dato $\phi : A \to B$ un omomorfismo di anelli, denotiamo con $\widetilde{\phi} : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ la funzione associata. Provare che:

a) Dato I ideale di A, sia IB l'ideale in B generato da $\phi(I)$. Allora l'immagine inversa di $V(I) \subseteq \operatorname{Spec} A$ in $\operatorname{Spec} B$ è $V(IB)$.

b) Se J è un ideale di B, allora la chiusura dell'immagine di $V(J) \subseteq \operatorname{Spec} B$ in $\operatorname{Spec} A$ è $V(\phi^{-1}(J))$.

c) L'immagine di $\widetilde{\phi}$ è denso in $\operatorname{Spec} A$ se e solo se il nucleo di ϕ è contenuto nel nilradicale di A.

Soluzione

Se $\phi : A \to B$ è un omomorfismo di anelli denoto con J^c la controimmagine di un ideale in B e I^e il generato dall'immagine di un ideale in A.

a) Voglio dimostrare che $\tilde{\phi}^{-1}(V(I)) = V(I^e)$. Osservo che $V(I^e) = \{p \in B \mid p \supseteq I^e\}$ e che $\tilde{\phi}^{-1}(V(I)) = \{p \in B \mid p^c \supseteq I\}$.

   Mostro che i due insiemi sono uguali: se $p \supseteq I^e$ allora $p^c \supseteq I^{ec} \supseteq I$, viceversa se $p^c \supseteq I$ allora $I^e \subseteq p^{ce} \subseteq p$.

b) Voglio mostrare che $\overline{\tilde{\phi}(V(J))} = V(J^c)$. Poiché $V(J^c)$ è un chiuso per mostrare l'inclusione $\subseteq$ mi basta mostrare che $\tilde{\phi}(V(J)) \subseteq V(J^c) = \{p \in A \mid p \supseteq J^c\}$. Sapendo $\tilde{\phi}(V(J)) = \{q^c \mid q \in B \quad q \supseteq J\}$ e $q^c \supseteq J^c$ deduco la prima inclusione.

   D'altra parte voglio mostrare che ogni primo $p \in A$ contenente J^c appartiene ad ogni chiuso $V(I)$ contenente $\tilde{\phi}(V(J))$. Uso il primo punto e ottengo $V(J) \subseteq \tilde{\phi}^{-1}(V(I)) = V(I^e)$ cioè $I^e \subset J$. In particolare $p \supseteq J^c \supseteq I^{ec} \supseteq I$ quindi $p \in V(I)$.

c) L'immagine dello spettro è densa se e solo se $V(0) = \operatorname{Spec} A = \overline{\tilde{\phi}(V(0))} = V(\ker\phi)$ (ho usato il secondo punto). Dato che $(0) \subseteq \ker\phi$, $V(0) = V(\ker\phi)$ se e solo se $\ker\phi \subseteq \sqrt{(0)} = \mathcal{N}(A)$.

Esercizio 2

Testo

Mostrare che la funzione $f : \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ indotta dall'ovvia immersione $\mathbb{R}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$ è suriettiva, e descrivere tutte le fibre.

Soluzione

E' noto il seguente lemma:

Lemma 1. *Un polinomio irriducibile p in $\mathbb{R}[x]$ o è irriducibile di grado uno in $\mathbb{C}[x]$ oppure si spezza come prodotto di due polinomi irriducibili coniugati di grado uno $(q, \overline{q})$ tali che $p = q\overline{q}$.*

So che $\mathbb{K}[x]$ è PID quindi ogni ideale primo in $\mathbb{R}[x]$ è generato da un polinomio primo p. Per dimostrare la suriettività di f basta prendere p se è irriducibile in $\mathbb{C}[x]$, altrimenti il polinomio q associato (come da lemma). In entrambi i casi l'immagine tramite f è la contrazione ad $\mathbb{R}[x]$ che è proprio p.

Nel primo caso la fibra è un solo punto che corrisponde all'ideale esteso e nel secondo caso la fibra è composta da due punti che corrispondono ai primi (q) e $(\overline{q})$. Se si prende in considerazione la controimmagine del punto generico (0) si ottiene il punto generico (0) in $\mathbb{C}[x]$.

Esercizio 3

Testo

Sia k un campo algebricamente chiuso; Definiamo $X := \mathbb{P}^1(k)$, con la topologia di Zariski. Sia $K := k(x)$ il campo delle funzioni razionali su X. Consideriamo il fascio $\mathcal{O}_X^*$ su X che associa ad ogni sottoinsieme aperto $U \subseteq X$ il gruppo delle funzioni regolari mai zero su U, con l'operazione data dalla moltiplicazione. Inoltre consideriamo il fascio localmente costante K_X^* associato al gruppo K^* degli elementi non nulli di K, e il fascio $\bigoplus_{p\in X} i_{p^*}\, \mathbb{Z}_p$, dove $i_p : p \to X$ è l'inclusione del punto p in X (con $\mathbb{Z}_p$ denotiamo il fascio associato a $\mathbb{Z}$ sul punto p, considerato come uno spazio topologico: non c'entra niente con i numeri p-adici).

a) Mostrare che

$$K_X^* = \begin{cases} K^* & \text{if } U \neq \emptyset \\ \{1\} & \text{if } U = \emptyset \end{cases}$$

per ogni sottoinsieme aperto $U \subseteq X$

b) Mostrare che

$$\Big(\bigoplus i_{p*}\,\mathbb{Z}_p\Big)(U) = \bigoplus_{p\in U} \mathbb{Z}$$

per ogni sottoinsieme aperto $U \subseteq X$

c) Per ogni $f \in K^*$ ed ogni $p \in X$, incluso il punto all'infinito, denotiamo con $\mathrm{ord}_p f$ l'ordine di zero di f nel punto p (questo è negativo se f ha un polo in p). Sia

$$\mathrm{div} : K_X^* \longrightarrow \bigoplus_{p\in X} i_{p*}\,\mathbb{Z}_p$$

l'omomorfismo che manda $f \in K^* = K_X^*(U)$ in $(\mathrm{ord}_p f)_{p\in U} \in \bigoplus_{p\in U} \mathbb{Z}$ per ogni sottoinsieme aperto $U \subseteq X$. Provare che esiste una sequenza esatta di fasci su X

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow K_X^* \xrightarrow{div} \bigoplus_{p\in X} i_{p*}\,\mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$$

dove il primo omomorfismo è la ovvia inclusione.

d) Consideriamo l'omomorfismo suriettivo

$$\Gamma(X, \bigoplus_{p\in X} i_{p*}\,\mathbb{Z}_p) = \bigoplus_{p\in X} \mathbb{Z} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{Z}$$

definito da $\sigma((n_p)) = \sum_{p\in X} n_p$. Dimostrare che l'immagine dell'omomorfismo $\Gamma(X, K_X^*) \longrightarrow \Gamma(X, \bigoplus_{p\in X} i_{p*}\,\mathbb{Z}_p)$ indotto da *div* è esattamente il nucleo di σ. In particolare, questo non è suriettivo, nonostante il fatto che *div* sia suriettivo come omomorfismo di fasci.

Soluzione

a) So che $F(\emptyset) = 0$ per ogni fascio F per quanto dimostrato a lezione in particolare $K_X^*(\emptyset) = \{1\}$. Se $U \neq \emptyset$ è un aperto di X allora è connesso quindi ogni funzione localmente costante è costante di conseguenza $K_X^*(U) = K^*$.

b) Il fascio $i_{p*}\,\mathbb{Z}_p$ associa ad un aperto U l'anello $Z_p(i_p^{-1}(U))$ quindi vale:

$$i_{p*}\,\mathbb{Z}_p(U) = \begin{cases} \mathbb{Z} & se\ p \in U \\ 0 & se\ p \notin U \end{cases}$$

Il prefascio $\widetilde{\bigoplus}_{p\in X} i_{p*}\,\mathbb{Z}_p$ associa ad un aperto U il seguente anello

$$\widetilde{\bigoplus}_{p\in X} i_{p*}\,\mathbb{Z}_p(U) = \bigoplus_{p\in U} \mathbb{Z}$$

Verifico che è un fascio: per ogni aperto non vuoto U e per ogni ricoprimento $\{U_i\}_{i\in I}$ esiste un indice j tale che U_j è non vuoto. Sezioni locali coerenti s_i si incollano in modo unico ad un elemento s di $\prod_{p\in U}\mathbb{Z}$. Voglio mostrare che $s\in\bigoplus_{p\in U}\mathbb{Z}$, essendo U_j non vuoto e U dotato della topologia cofinita allora $U\setminus U_j$ è finito. Infine sapendo che $s_{|U_j}=s_j\in\bigoplus_{p\in U_j}\mathbb{Z}$ si conclude che $s\in\bigoplus_{p\in U}\mathbb{Z}$. Ciò mi permette di conscludere che $\widetilde{\bigoplus_{p\in X} i_{p*}\,\mathbb{Z}_p}=\bigoplus_{p\in X} i_{p*}\,\mathbb{Z}_p$ e quindi la tesi.

c) Voglio dimostrare che la successione

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_x^*(U)\longrightarrow K_X^*(U)\longrightarrow(\bigoplus_{p\in X} i_{p*}\,\mathbb{Z}_p)(U)\longrightarrow 0$$

è esatta per ogni aperto U strettamente contenuto in X. Sia $p\notin U$ un punto di X e X_1 la carta non contenente p; essendo $U\subseteq X_1$ si ha che $\mathcal{O}_X^*(U)\simeq O_{X_1}^*(U)=O_{\mathbb{A}^1}^*(U)=(k[x]_f)^*$ [1] dove $f\in k[x]$ un polinomio tale che $U=X_f$. Inoltre $K_X^*(U)=K^*$ e l'ultimo termine della successione esatta è $\bigoplus_{p\in X_f}\mathbb{Z}$. Mi basta dimostrare che la successione

$$0\longrightarrow(k[x]_f)^*\longrightarrow K^*\longrightarrow\bigoplus_{p\in X_f}\mathbb{Z}\longrightarrow 0$$

è esatta per ogni $f\in k[x]$. L'iniettività della prima mappa segue dal fatto che $k[x]_f$ è un dominio e $K=k(x)=Q(k[x]_f)$. L'omomorfismo *div* è suriettivo perché dato $u=\{u_p\}_{p\in X_f}\in\bigoplus_{p\in X_f}\mathbb{Z}$ costruisco la funzione razionale $\prod_{p\in X_f}(x-p)^{u_p}\in K^*$ (dove penso $U\subset\mathbb{A}^1$) che è un prodotto di finiti termini. La sua immagine attraverso *div* è u e quindi è suriettiva.

Infine $\ker div=(k[x]_f)^*$ perché gli elementi in $(k[x]_f)^*$ non hanno nè zeri nè poli in X_f. Per mostrare l'altro contenimento prendo una funzione razionale $\frac{g}{h}\in K^*$ nel nucleo di *div*. Supponendo i due polinomi g e h coprimi (non possono annullarsi entrambi nello stesso punto) si ha che non hanno zeri in X_f quindi $V(h)\subseteq V(f)$ cioè esiste un polinomio a tale che $ah=f^n$. Notando che a non si annulla su X_f si ha che $\frac{g}{h}=\frac{ag}{f^n}\in(k[x]_f)^*$.

Dimostro che la successione è esatta anche per $U=X$ e quindi devo mostrare che

$$0\longrightarrow k^*\longrightarrow K^*\longrightarrow\bigoplus_{p\in X}\mathbb{Z}$$

è esatta. La dimostrazione è uguale a prima con la variante che se $\frac{g}{h}\in\ker div$ due polinomi coprimi allora $V(g)=V(h)=\emptyset$ cioè che $g,h\in k^*$.

[1] Con $(k[x]_f)^*$ intendo il sottogruppo delle funzioni regolari su X_f che non si annullano mai su X_f.

Per mostrare che Im $div = \bigoplus_{p\in X} i_{p*}\,\mathbb{Z}_p$ dimostro che ogni $u \in \bigoplus_{p\in X}\mathbb{Z}$ appartiene a $u \in (\widetilde{\mathrm{Im} div})^{sh}$. Prendo due aperti X_1 e X_2 che ricoprono X e strettamente contenuti in X. Le restirzioni di u ai due aperti appartengono all'immagine di *div* perché ho già dimostrato che Im $div(X_i) = \bigoplus_{p\in X_i}\mathbb{Z}$ e le restrizioni all'intersezione coincidono. Per la proprietà di fascio u appartiene all'immagine di *div* e ciò conclude la surgettività.

d) Dato un punto chiuso in X che chiamerò ∞ prendo l'aperto U complementare del punto che so essere isomorfo ad $\mathbb{A}^1$. In questa carta ogni funzione razionale è della forma $\prod_{p\in U}(x-p)^{u_p}$ (il prodotto ha solo finiti termini diversi da 1) e il suo ordine in ∞ è esattamente $-\sum_{p\in U} u_p$ quindi l'immagine di *div* è contenuta nel nucleo di σ.

   Per mostrare l'altro contenimento uso la stessa carta U e fissata una successione $(u_p)_{p\in X} \in \ker\sigma$ costruisco la funzione razionale su X determinata da $f(x) = \prod_{p\in U}(x-p)^{u_p}$ (nella carta U). Il polo in ∞ è per il ragionamento precedente $-\sum_{p\in U} u_p$, quindi la successione u è l'immagine di f tramite *div.* Ho mostrato che $\ker\sigma = \mathrm{Im}\, div$ e quindi la successione esatta di fasci non è una successione esatta degli anelli relativi ad X.

Esercizio 4

Testo

Sia A un anello a valutazione discreta con campo dei quozienti K. Definiamo $X \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Spec} A$ e $Y \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Spec} K$. Denotiamo con s il punto chiuso di X, e con η l'unico punto di Y. Se $f : Y \to X$ è la funzione continua definita fa $f(\eta) = s$, mostrare che esiste un omomorfismo di fasci di anelli $f^\# : \mathcal{O}_X \to f_*\,\mathcal{O}_Y$ tale che il risultante morfismo di spazi anellati $(f, f^\#)$ non sia un morfismo di spazi localmente anellati, e dunque non sia indotto da un morfismo di anelli $A \to K$.

Soluzione

Esibisco il fascio $f_*\,\mathcal{O}_Y$ calcolandolo su ogni aperto di X $(X, \emptyset\ e\ \eta^c)$.

$$f_*\,\mathcal{O}_Y(X) = K$$
$$f_*\,\mathcal{O}_Y(\eta^c) = 0$$
$$f_*\,\mathcal{O}_Y(\emptyset) = 0$$

Quindi posso definire $f^\#(\eta^c)$ e $f^\#(\emptyset)$ in un unico modo (la funzione nulla). Qualsiasi scelta di $f^\#(X)$ è una scelta coerente con la restrizione (cioé è un omomorfismo di fasci) perché esiste unico omomorfismo con codominio

0. Impongo che $f^\#(X) : \mathcal{O}_X(X) \longrightarrow f_* \mathcal{O}_Y(X)$ è la mappa di inclusione di A in K è un omomorfismo di fasci. Osservo che l'omomorfismo indotto da $f^\#$ sulle spighe $\mathcal{O}_{X,f(p)} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,p}$ non è locale perché è l'immersione di A in K e l'immagine del massimale m di A non è contenuta nel massimale (0).

In particolare l'omomorfismo di spazi anellati non è un omomorfismo di spazi localmente anellati e quindi non è indotto da un omomorfismo di anelli (per la proposizione dimostrata a lezione).

Esercizio 5

Testo

Siano X e Y spazi localmente anellati, e U un sottoinsieme aperto di X. Mostrare che la composizione con l'immersione $U \subseteq X$ dà una bigezione tra i morfismi di spazi localmente anellati $Y \to U$ e i morfismi di spazi localmente anellati $Y \to X$ la cui immagine è contenuta in U.

Soluzione

Abbiamo visto che l'inclusione di U in X è un omomorfismo di spazi localmente anellati $(j, j^\#)$. Dato un qualunque morfismo di spazi localmente anellati $(f, f^\#)$ tra Y e U posso comporre con J e ottenere un morfismo di spazi localmente anellati tra Y e X. E' evidente che il morfismo ottenuto ha immagine contenuta in U quindi chiamo $\hat{j}$ questa corrispondenza. Devo dimostrare che è iniettiva e suriettiva.

Suppongo che esistano due morfismi $(f, f^\#)$ e $(g, g^\#)$ tali che le immagini attraverso $\hat{j}$ coincidono. Come morfismo di spazi topologici ottengo che $j \circ f = j \circ g$ e per iniettività di j ottengo $f = g$, rimane da dimostrare $f^\# = g^\#$. Per come è definita la composizione di morfismi di fasci so che $j_* f^\# \circ j^\# = j_* g^\# \circ j^\#$. Osservando che $j^\#$ è la restrizione del fascio da X in U ottengo che $j_* f^\# = j_* g^\#$ come morfismo di fasci da $j_* \mathcal{O}_U$ in $\mathcal{O}_Y$. Essendo $j_* f^\#(V) = f^\#(V \cap U)$ (idem con g) si ottiene che $f^\# = g^\#$ come morfismo di fasci da $\mathcal{O}_U$ in $\mathcal{O}_Y$. Ho dimostrato l'iniettività di $\hat{j}$, verifico la suriettività.

Sia $(f, f^\#)$ un qualsiasi morfismo di spazi localmente anellati da Y in X la cui immagine sia contenuta in U. Definisco il morfismo $(f, f^\#_{|U})$ tra Y e U e verifico che l'immagine tramite $\hat{j}$ è il morfismo $(f, f^\#)$. La funzione continua f si restringe a una funzione continua a valori in U per ipotesi, inoltre la restrizione di $f^\#$ è morfismo di fasci ed è locale perché lo era $f^\#$ e le spighe $\mathcal{O}_{X,p}$ e $\mathcal{O}_{U,p}$ coincidono per ogni p in U. Manca solo verificare che $\hat{j}(f, f^\#_{|U}) = (f, f^\#)$; è evidente come funzioni continue. Utilizzando il fatto che $f^\#(V) = f^\#(V \cap U) = f^\#(j^{-1}V) = j_* f^\#(U \cap V)$ ottengo che

$f^{\#} = j_* f^{\#}_{|U} \circ j^{\#}$ cioé che la corrispondenza è suriettiva. Ho dimostrato che $\hat{j}$ è una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi.

Esercizio 6

Testo

Sia $(X, \mathcal{O}_X)$ uno spazio localmente anellato. Definiamo il *campo residuo* $k(p)$ nel punto $p \in X$ come il quoziente $(\mathcal{O}_X)_p/\mathsf{m}_p$, dove m_p è l'ideale massimale dell'anello locale $(\mathcal{O}_X)_p$. Per ogni sottoinsieme aperto $U \subseteq X$, ogni sezione $f \in \mathcal{O}_X(U)$, e ogni $p \in X$, definiamo $f(p)$ come l'immagine in $k(p)$ del germe $f_p \in (\mathcal{O}_X)_p$.

Mostrare che se $f \in \mathcal{O}_X(U)$, il *luogo degli zeri* di f, definito come $\{p \in U | f(p) = 0\}$, è chiuso in U.

Soluzione

Voglio dimostrare che il complementare del luogo di zeri di ϕ è aperto in U e quindi la tesi per passaggio al complementare. Per ogni punto p tale che $\phi(p) \neq 0$ dimostro che esiste un aperto V tale che ogni punto q di V non è nel luogo di zeri. La proprietà di p implica che $\phi_p \notin m_p$ e dato che $\mathcal{O}_{X,p}$ è locale allora ϕ_p è invertibile. In particolare esiste un aperto $V \subseteq U$ e una sezione ψ tale che $\phi \cdot \psi = 1 \in \mathcal{O}_X(V)$. Dimostro che per ogni punto q in V vale che $\phi(q) \neq 0$. Infatti vale che $\phi_q \cdot \psi_q = 1_q$ e quindi $\phi_q \notin m_q$ e $\phi(q) \neq 0$.

Esercizio 7

Testo

Sia G un gruppo che agisce sullo spazio localmente anellato X; in altre parole, abbiamo un omomorfismo da G nel gruppo degli automorfismi di X nella categoria degli spazi localmente anellati. Un *quoziente* di X sotto l'azione di G consiste di uno spazio localmente anellato X/G, con un morfismo di spazi localmente anellati $\pi : X \to X/G$, tali che

a) il morfismo π è G- invariante, ossia, se ϕ è un automorfismo di X indotto da un elemento di G, allora $\pi \circ \phi = \pi$, e

b) ogni morfismo G-invariante da X in un altro spazio localmente anellato si fattorizza unicamente attraverso X/G.

É facile vedere che queste proprietà caratterizzano X/G unicamente, a meno di un unico isomorfismo.

Provare che un quoziente esiste, e che può essere costruito come segue. Come spazio topologico ${X}/{G}$ è lo spazio delle orbite, con la sua topologia quoziente; sia $\pi : X \to Y$ la proiezione. Notare che G agisce sul fascio $\pi_* \mathcal{O}_X$; come struttura di fascio di $\mathcal{O}_{X/G}$, scegliere il fascio $(\pi_* \mathcal{O}_X)^G$ degli invarianti, ossia, per ogni sottoinsieme aperto $V \subseteq {X}/{G}$ poniamo $\mathcal{O}_{X/G}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(V))^G$.

Non dimenticare di dimostrare che ${X}/{G}$ è uno spazio *localmente* anellato.

Soluzione

Sia $G < \operatorname{Aut} X$ sottogruppo degli automorfismi di X come spazio localmente anellato e denoto l'azione di un elemento $g \in G$ come $g\cdot$ che agisce sugli aperti $U \subseteq X$ mandandoli in gU e sulle sezioni $s \in \mathcal{O}_X(U)$ vengono mandate in $gs \in \mathcal{O}_X(gU)$. Si definisce il fascio di anelli su ${X}/{G}$ dato da $\mathcal{O}_{X/G}(U) = \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U))^G = \{s \in \mathcal{O}_X(\pi^{-1}(U)) \mid gs = s\ \forall g \in G\}$

Si definisce $\pi^\# : \mathcal{O}_{X/G} \longrightarrow \pi_* \mathcal{O}_X$ il morfismo di fasci indotto dall'inclusione di $\mathcal{O}_{X/G}(U)$ in $\pi_* \mathcal{O}_X(U)$.

Osservo che $\mathcal{O}_{X/G}$ è un sottofascio di $\pi_* \mathcal{O}_X$ perché se s_i sono sezioni coerenti G invarianti allora lo è anche l'incollamento s (l'azione di G è un automorfismo di fasci). Di conseguenza $\left({X}/{G}, \mathcal{O}_{X/G}\right)$ è uno spazio anellato e il morfismo $(\pi, \pi^\#)$ è un morfismo di spazi anellati.

Verifico che ${X}/{G}$ è uno spazio localmente anellato e il morfismo π è morfismo di spazi localmente anellati. Basta vedere che la mappa $\pi^\#_{\pi(p)} : \mathcal{O}_{X/G,\pi(p)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,p}$ è un omomorfismo locale tra anelli locali. Sia m l'ideale massimale di $\mathcal{O}_{X,p}$, la sua controimmagine è un ideale. Se dimostro che ogni germe non appartenente alla controimmagine è invertibile segue che la spiga è locale e l'omomorfismo è locale.

Sia $[s, U]_{\pi(p)}$ tale che l'immagine $[s, U]_p$ sia invertibile in $\mathcal{O}_{X,p}$, esiste quindi un aperto $U' \subseteq U$ e una sezione $t \in \mathcal{O}_X(U')$ tale che $s_{|U'}t = 1 \in \mathcal{O}_X(U')$. Sia $W = \cup_{g \in G} gU'$ aperto saturo contenuto in U, per la proprietà di morfismo di fasci si ha che $s_{|gU'}gt = 1 \in \mathcal{O}_X(gU')$ (usando la proprietà $gs = s$). Voglio mostrare che $gt = ht$ in $gU' \cap hU'$: vale $s(gt - ht) = 0$ e moltiplicando per t a sinistra si ottiene che $gt = ht$ su $gU' \cap hU'$. Per la proprietà di fascio esiste una sezione $\tilde{t} \in \mathcal{O}_X(W)$ tale che $\tilde{t}_{|gU'} = gt$. Per costruzione $\tilde{t}$ è G invariante e quindi è ben definito $[\tilde{t}, W]_{\pi(p)} \in \mathcal{O}_{X/G,\pi(p)}$ e vale $[s, W]_{\pi(p)}[\tilde{t}, W]_{\pi(p)} = 1$.

Avendo dimostrato che ogni elemento non appartenente ad un ideale è invertibile deduco la località dell'anello e la massimalità dell'ideale. Di conseguenza la mappa è locale e quindi il morfismo è di spazi localmente anellati.

Il morfismo π è G invariante per come è stato costruito. Inoltre fattorizza ogni morfismo $\varphi : X \longrightarrow Y$ G-invariante perché definisco $\psi : {}^{X}\!/\!_{G} \longrightarrow Y$ tale che $\psi \circ \pi = \phi$. La definizione topologica di ψ non crea problemi, mostro come definire $\psi^{\#}$. Dato $s \in \mathcal{O}_Y(U)$ definisco $\psi^{\#}(s) \in \psi_* \mathcal{O}_{X/G}(U)$ come $\varphi^{\#}(s)$ che è G invariante per ipotesi e quindi appartiene a $\mathcal{O}_{X/G}(\varphi^{-1}(U))$. La mappa ψ è un morfismo di fasci e fattorizza il morfismo φ.