Esercizi di schemi

Roberto Pagaria

7 gennaio 2015

Esercizio 1

Testo

Sia X uno schema. Per ogni $x \in X$, sia $\mathsf{m}_x \subseteq (\mathcal{O}_X)_x$ l'ideale massimale della spiga, e $k(x) = (\mathcal{O}_X)_x/\mathsf{m}_x$ il campo residuo di x. Definiamo lo *spazio tangente di Zariski* $\mathrm{T}_{X,x}$ a X in x come il duale del $k(x)$ spazio vettoriale $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.

Ora assumiamo che X sia uno schema su $\operatorname{Spec} k$, e definiamo

$$k[\epsilon] \stackrel{\text{def}}{=} k[x]/(x^2)$$

come l'*anello dei numeri duali*. Mostrare che esiste una corrispondenza bigettiva tra i morfismi di schemi su k $\operatorname{Spec} k[\epsilon] \to X$ e le coppie (x, v), dove $x \in X(k)$, e $v \in \mathrm{T}_{X,x}$.

Soluzione

Ogni morfismo f di schemi ha associato un morfismo φ tra i fasci e a morfismi su un campo k corrispondono omomorfismi di fasci di k-algebre. Nel caso in questione ad ogni morfismo $f : \operatorname{Spec} k[\epsilon] \to X$ corrisponde un morfismo $\varphi : \mathcal{O}_X \to k[\epsilon]$.

Avendo $k[\epsilon]$ un solo ideale primo denoto con p l'unico punto e con $q = f(p)$ la sua immagine tramite f. Il punto p è razionale e quindi viene mandato tramite il morfismo f in un punto razionale (e chiuso).

Come visto a lezione c'è una corrispondenza biunivoca tra i morfismi tra Y e X con supporto in un chiuso Z e i morfismi tra Y e Z. Di conseguenza il morfismo è univocamente determinato dal punto razionale q e da $\varphi : \mathcal{O}_q \simeq \mathcal{O}_{X,q} \to k[\epsilon]$.

Mostro ora che gli omomorfismi locali di k-algebre tra $\mathcal{O}_q$ e $k[\epsilon]$ sono in corrispondenza con $\mathrm{T}_{X,q}$. Del fatto che l'omomorfismo è locale si ottiene che $\varphi(\mathfrak{m}^2) = 0$ e che si restringe a $\tilde{\varphi} : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to (x)/(x^2) \simeq k$ che è k-lineare. Quindi si associa ad ogni morfismo di k-schemi un elemento del tangente.

Viceversa dato $v : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to k$ e notando che ogni elemento di $\mathcal{O}_q$ si scrive in modo unico come $a + m + n$ dove $a \in k \subset \mathcal{O}_q$, $m \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ e $n \in \mathfrak{m}^2$ si costruisce un morfismo di schemi. Definisco $\varphi(a+m+n) = a+v(m)x \in k[\epsilon]$ e osservo che è ben definito ed è un morfismo locale di k-algebre e quindi induce un unico morfismo di k-schemi.

Le due associazioni sono una l'inversa dell'altra.

Esercizio 2

Testo

(a) Sia X uno schema, e poniamo $A \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O})$. Provare che i seguenti fatti sono equivalenti.

   (i) X è sconnesso.

   (ii) *Spec* A è sconnesso;

   (iii) esistono $e_1, e_2 \in A$ tali che $e_1 e_2 = 0$, $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$ e $e_1 + e_2 = 1$;

   (iv) A è isomorfo al prodotto $A_1 \times A_2$ di due anelli non-zero.

(b) mostrare che ogni *schema locale* (cioé lo spettro di un anello locale) è connesso.

Soluzione

Vale che $A = \mathcal{O}_X(X)$, procediamo alla dimostrazione:

$1 \Rightarrow 4$ Siano X_1 e X_2 aperti non vuoti disgiunti la cui unione è X che esistono perché X è sconnesso. Date due funzioni regolari $f \in \mathcal{O}_X(X_1)$ e $g \in \mathcal{O}_X(X_2)$ per le proprietà di fasci si incollano in modo unico a una unica funzione regolare globale. Abbiamo quindi una mappa $\mathcal{O}_X(X_1) \times \mathcal{O}_X(X_2) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(X)$ che è un isomorfismo perché l'inversa è la restrizione $(\rho_{X,X_1}, \rho_{X,X_2})$. In particolare $A \simeq A_1 \times A_2$ anelli diversi da zero perché X_1 e X_2 sono non vuoti.

$4 \Rightarrow 3$ Gli elementi $e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$ sono idempotenti e soddisfano le proprietà richieste: $(1,0) + (0,1) = (1,1)$ e $(1,0)(0,1) = 0$.

$3 \Rightarrow 2$ Mostro che $\operatorname{Spec} A = \mathcal{V}(e_1) \sqcup \mathcal{V}(e_2)$: infatti $\mathcal{V}(e_1) \cup \mathcal{V}(e_2) = \mathcal{V}(e_1 e_2) = \mathcal{V}(0) = \operatorname{Spec} A$ e $\mathcal{V}(e_1) \cap \mathcal{V}(e_2) = \mathcal{V}(e_1, e_2) \subseteq \mathcal{V}(e_1 + e_2) = \mathcal{V}(1) = \emptyset$. In conclusione $\operatorname{Spec} A$ non è connesso.

$2 \Rightarrow 4$ Osservo che $\operatorname{Spec} A$ è uno schema e che l'anello delle funzioni regolari globali $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A)$ è l'anello A. Quindi posso applicare $1 \Rightarrow 4$ al caso particolare di $\operatorname{Spec} A$ schema affine.

$3 \Rightarrow 1$ Siano X_{e_1} e X_{e_2} i punti di X dove non si annullano e_1 e e_2, sono aperti perché e_1 e e_2 sono funzioni regolari. Inoltre sono disgiunti perché $X_{e_1} \cap X_{e_2} = X_{e_1 e_2} = X_0 = \emptyset$ e la loro unione è X perché $X_{e_1} \cup X_{e_2} \supseteq X_{e_1+e_2} = X_{\mathbb{1}} = X$

Per il punto (b) suppongo per assurdo che lo schema locale X sia sconnesso allora A sarebbe prodotto di due anelli non zero A_1 e A_2 (per il punto precedente). Siano $m_1 \subset A_1$ e $m_2 \subset A_2$ due ideali massimali allora $m_1 \times A_2$ e $A_1 \times m_2$ sono due ideali massimali distinti di A. Ciò contraddice la località e ho trovato l'assurdo.

Esercizio 3

Testo

Sia $\mathscr{C}$ una categoria con prodotto fibrato, $X \to S$, $Y \to S$ e $S' \to S$ tre frecce in $\mathscr{C}$. Mostrare che esiste un isomorfismo canonico

$$(X \times_S Y) \times_S S' \simeq (X \times_S S') \times_{S'} (S' \times_S Y)$$

in $\mathscr{C}$.

Soluzione

Mostro che l'oggetto $A \overset{def}{=} (X \times_S S') \times_{S'} (S' \times_S Y)$ ha la proprietà universale del prodotto fibrato tra $X \times_S Y$ e S' su S e quindi che esiste unico (quindi canonico) isomorfismo cercato.

Dato un oggetto T e due mappe f e h voglio mostrare che si fattorizzano tramite A.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& A \arrow[r] \arrow[d] & X \times_S Y \arrow[d] \\
& S' \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

Siano $f_1 = \pi_1 \circ f$ e $f_2 = \pi_2 \circ f$ le mappe indotte da f su X e Y (f_1 e f_2 determinano univocamente f). Per la proprietà dei prodotti fibrati $X \times_S S'$ e $Y \times_S S'$ esistono uniche g_1 e g_2 che fattorizzano le mappe f_1, h e f_2, h.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[drr, bend left, "f_1"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] \arrow[dr, dashed, "g_1"] & & \\
& X \times_S S' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
& S' \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

Sia $\theta : T \to A$ l'unica mappa che fattorizza g_1 e g_2; questa mappa fattorizza f e h perché tutti i diagrammi in questione sono commutativi ed è unica perché g_1, g_2, f_1 e f_2 sono univocamente determinate da θ.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "\theta"] \arrow[drr, bend left, "g_1"] \arrow[ddr, bend right, "g_2"'] & & \\
& A \arrow[r] \arrow[d] & X \times_S S' \arrow[d] \\
& Y \times_S S' \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

Esercizio 4

Testo

Sia $f : \mathbb{A}^2_R \to \mathbb{A}^2_R$ il morfismo di schemi corrispondente all'omomorfismo di R-algebre $R[x,y] \to R[x,y]$ che manda x in x e y in xy. Sia $p \in \mathbb{A}^2_R$. Provare che la fibra $f^{-1}(p)$ può essere solo vuota, isomorfa a $p = Spec\, k(p)$ o a $\mathbb{A}^1_k(p)$.

Soluzione

Per quanto visto a lezione la fibra in p è isomorfa a $\mathbb{A}^2_R \times_{\mathbb{A}^2_R} \{p\} = \mathrm{Spec}(R[x,y] \otimes_{R[x,y]} k(p))$ Calcolo il prodotto tensore ricordando che le mappe sottointese sono $\varphi : R[x,y] \to R[x,y]$ definita da $x \mapsto x$ e $y \mapsto xy$ e ψ definita da

$$\begin{tikzcd}
& R[x,y]_p \arrow[dr] & \\
R[x,y] \arrow[ur] \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr] & & k(p) \\
& R[x,y]\big/p \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Se $x \notin p$ allora x è diverso da zero in $k(p)$ e quindi invertibile. In particolare vale che $y \otimes 1 = y \otimes xx^{-1} = xy \otimes x^{-1} = 1 \otimes yx^{-1}$ che fornisce un isomorfismo tra $R[x,y] \otimes_{R[x,y]} k(p)$ e $k(p)$. In questo caso ($x \notin p$) la fibra è $p = \mathrm{Spec}\, k(p)$.

Altrimenti si ottiene che $x = 0$ in $k(p)$ e quindi $R[x,y] \otimes_{R[x,y]} k(p) = R[y] \otimes_{R[y]} k(p)$ con $\varphi(y) = 0$. Distinguo due casi a seconda se y è contenuto o meno in p.

Se $y \in p$ allora $R[y] \otimes_{R[y]} k(p) = R[y] \otimes_R k(p) = (\mathbb{Z}[y] \otimes_{\mathbb{Z}} R) \otimes_R k(p) = \mathbb{Z}[y] \otimes_{\mathbb{Z}} (R \otimes_R k(p)) = \mathbb{Z}[y] \otimes_{\mathbb{Z}} k(p) = k(p)[y]$ e quindi la fibra è proprio $\mathbb{A}^1_{k(p)}$.

Altrimenti $y \neq 0$ in $k(p)$ quindi dati due elementi $a \in R[y]$ e $b \in k(p)$ si ha che $a \otimes b = a \otimes yy^{-1}b = y(a \otimes y^{-1}b) = 0 \cdot a \otimes y^{-1}b = 0$ quindi l'anello è nullo e il suo spettro è vuoto. In quest'ultimo caso la fibra è vuota.

Tutti e tre i casi si verificano prendendo rispettivamente $p = (x - 1, y), (x, y)\ e\ (x, y - 1)$.

Esercizio 5

Testo

Siano m, n due interi positivi. Mostrare che $\mathbb{P}_R(m, n)$ è isomorfo a $\mathbb{P}^1_R$.

Soluzione

Sia $\mathbb{P}_R(m, n) = \operatorname{Proj} R[x_0, x_1]$ dove $\deg x_0 = m$ e $\deg x_1 = n$ e $\mathbb{P}^1_R = \operatorname{Proj} R[y_0, y_1]$ indeterminate di primo grado. Chiamo $r = (m, n)$ il massimo cum divisore e a e b gli interi tali che $ra = m$ e $rb = n$.

Definisco $\varphi : R[x_0, x_1] \to R[y_0, y_1]$ l'omomorfismo di algebre graduato di grado uno che manda $x_0 \mapsto y_0^m$ e $x_1 \mapsto y_1^n$.

Osservando che $\mathcal{V}_+(\varphi(R[x_0, x_1]_+)) = \emptyset$, l'omomorfismo φ induce un omomorfismo f di schemi tra $\mathbb{P}^1_R$ e $\mathbb{P}_R(m, n)$. Vale che f è un isomorfismo se e solo se lo è nelle carte indotte da x_0 e x_1; mostro che $f_{|U_0}$ è isomorfismo e allo stesso modo si mostra che $f_{|U_1}$ è isomorfismo. L'omomorfismo $f_{|U_0}$ è indotto da $\psi : R\left[\frac{x_1^a}{x_0^b}\right] \to R\left[\frac{y_1}{y_0}\right]$ che manda $\frac{x_1^a}{x_0^b} \mapsto \frac{y_1^{an}}{y_0^{bm}} = \left(\frac{y_1}{y_0}\right)^{rab}$. L'immagine di ψ contiene $R[y_0, y_1]^{(rab)}$ e ψ è iniettivo quindi $f_{|U_0}$ è isomorfismo tra U_0 e V_0.

Ho dimostrato che f è isomorfismo di schemi e che $\mathbb{P}_R(m, n)$ è isomorfo a $\mathbb{P}^1_R$.

Esercizio 6

Testo

Mostrare che $\mathbb{P}_R(1, 2, 3)$ è isomorfo ad uno sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^6_R$.

Soluzione

Definisco la mappa φ da $R[t_0, t_1, \dots, t_6]$ in $R[x_0, x_1, x_2]$ graduata di grado sei definita da:

$$\begin{aligned}
\varphi(t_0) &= x_0^6 \\
\varphi(t_1) &= x_0^4 x_1 \\
\varphi(t_2) &= x_0^2 x_1^2 \\
\varphi(t_3) &= x_1^3 \\
\varphi(t_4) &= x_2^2 \\
\varphi(t_5) &= x_0 x_1 x_2 \\
\varphi(t_6) &= x_0^3 x_2
\end{aligned}$$

La funzione f indotta tra $\mathbb{P}_R(1,2,3)$ e $\mathbb{P}^6_R$ è ben definita su tutto il dominio perché $\mathcal{V}_+(\varphi(R[t_0, \dots, t_6]_+)) = \emptyset$ in quanto l'immagine contiene tutti i monomi di grado multiplo di sei. Si ha quindi un isomorfismo di R-algebre $\overline{\varphi} : R[t_0, \dots, t_6]/\ker\varphi \xrightarrow{\sim} R[x_0, x_1, x_2]^{(6)}$ che induce un isomorfismo $\overline{f}$:

$$\mathbb{P}_R(1,2,3) \xrightarrow{\overline{f}} \mathcal{V}_+(\ker\varphi) \hookrightarrow \mathbb{P}^6_R$$

Dove la prima mappa è l'isomorfismo $\overline{f}$ e la seconda è la canonica immersione chiusa di $\mathcal{V}_+(\ker\varphi)$. La composizione fornisce un isomorfismo tra $\mathbb{P}_R(1,2,3)$ e un sottoschema chiuso di $\mathbb{P}^6_R$

Esercizio 7

Testo

La *sezione zero* di $\mathbb{A}^n_R \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Spec} R[x_1, \dots, x_n]$ è l'embedding chiuso

$$\operatorname{Spec} R \hookrightarrow \mathbb{A}^n_R$$

corrispondente all'omomorfismo suriettivo di R-algebre $R[x_1, \dots, x_n] \to R$ che manda ogni x_i in 0.

Se X è uno schema e $p \in X$, denotiamo con $\mathfrak{m}_p$ l'ideale massimale dell'anello locale $(\mathcal{O}_X)_p$, e, come al solito, denotiamo con $k(p) \overset{\text{def}}{=} (\mathcal{O}_X)_p/\mathfrak{m}_p$ il campo dei quozienti. Se n è un numero naturale e $(f_1, \dots, f_n) \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O})$, diciamo che $(f_1, \dots, f_n)$ *non si annulla mai* se $(f_1(p), \dots, f_n(p)) \neq 0 \in k(p)^n$ per ogni $p \in X$.

Sia $X \to \operatorname{Spec} R$ un R-schema.

(a) Provare che esiste una bigezione naturale tra i morfismi di R-schemi $X \to \mathbb{A}^n_R$ e $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O})^n$.

(b) Sia $\operatorname{Spec} R \subseteq \mathbb{A}^n_R$ la sezione zero. Allora esiste una bigezione naturale tra i morfismi di R-schemi $X \to \mathbb{A}^n_R \setminus \operatorname{Spec} R$ e le n-uple di funzioni in $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{O})^n$ che non si annullano mai.

Soluzione

(a) Suppongo che X sia affine, so che i morfismi di schemi su R da X in $\mathbb{A}^n_R$ sono in corrispondenza biunivoca con i morfismo di R-algebre tra $R[x_1, \dots, x_n]$ e $\mathcal{O}_X(X)$. Per la proprietà di base di R-algebra ogni morfismo è in corrispondenza biunivoca con le funzioni da $\{x_1, \dots, x_n\}$ in $\mathcal{O}_X(X)$.

$$\begin{tikzcd}
& \{x_1, \dots, x_n\} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
R[x_1, \dots, x_n] \arrow[rr, "f^{\#}"] & & \mathcal{O}_X(X)
\end{tikzcd}$$

Quindi si ha corrispondenza tra i morfismi di schemi e gli elementi di $\mathcal{O}_X(X)^n$.

Nel caso generale X è ricoperto da schemi affini X_i e ogni morfismo f è univocamente determinato dai morfismi f_i tra X_i e $\mathbb{A}^n_R$ tali che le restrizioni di f_i e f_j ad $X_{i,j}$ coincidano. Per quanto dimostrato nel caso affine questi morfismi f_i sono in corrispondenza con gli elementi $g_i \in \mathcal{O}_X(X_i)^n$. La condizione di incollamento implica che gli elementi g_i e g_j coincidono su $\mathcal{O}_X(X_{i,j})^n$ e quindi per la condizione di fascio si incollano ad un unico elemento $g \in \mathcal{O}_X(X)$.

Viceversa dato un elemento $g \in \mathcal{O}_X(X)$ le sue restrizioni g_i agli aperti affini X_i determinano morfismi di schemi tra X_i e $\mathbb{A}^n_R$ che coincidono sulle intersezioni $X_{i,j}$ e quindi determinano univocamente un morfismo $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^n_R$.

(b) Uso la corrispondenza mostrata nel punto (a) e dimostro che si restringe ai morfismi la cui immagine non interseca il chiuso $\operatorname{Spec} R$ e alle n-uple che non si annullano mai. Voglio mostrare che un punto $p \in X$ ha immagine tramite f in $\operatorname{Spec} R$ se e solo se $(g_1, \dots, g_n) = 0 \in k(p)$ e ciò conclude la corrispondenza.

Essendo quello precedente un enunciato locale mi restringo senza perdita di generalità ad un aperto affine $X' = \operatorname{Spec} A$ contenente p. Considero la composizione $R[x_1, \dots, x_n] \xrightarrow{f^{\#}} A \to k(p)$ ed è determinata da $x_i \mapsto g_i(p)$. Vale che $f(p) \subseteq \mathcal{V}(x_1, \dots, x_n)$ se e solo se $(f^{\#})^{-1}(p) \supseteq (x_1, \dots, x_n)$ se e solo se il nucleo della composizione contiene $(x_1, \dots, x_n)$ se e solo se $g_i(p) = 0 \in k(p)$ per ogni i.

Esercizio 8

Testo

(a) Siano f_0, f_1 due polinomi in $k[t]$ che generano l'ideale (1) in $k[t]$. Dare condizioni necessarie e sufficienti su (f_0, f_1) affinché il morfismo $(f_0 : f_1) : \mathbb{A}^1_k \to \mathbb{P}^1_k$ sia suriettivo

(b) Descrivere la fibra di $(t : t^2 + 1) : \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$. La descrizione dovrà essere completamente esplicita: ogni fibra deve essere scritta come unione disgiunta di schemi Spec A, dove A è un campo o nella forma $k[x]/(x^2)$, dove k è un campo.

Soluzione

Le due funzioni $\mathbb{A}^1_{f_0} \mapsto \mathbb{P}^1_{x_0}$ e $\mathbb{A}^1_{f_1} \mapsto \mathbb{P}^1_{x_1}$ sono suriettive se e solo se è suriettiva $(f_0 : f_1)$.

Proposizione 1. *Il morfismo* $(f_0 : f_1)$ *non è suriettivo se e solo se esistono* $a, b \in k$ *tali che* $af_0 + bf_1 = 1 \in k[t]$.

Dimostrazione. Se esistono a e b che soddisfano la condizione sopra allora supponendo $b \neq 0$ (l'altro caso è analogo) e guardando il morfismo indotto tra $k[\frac{x_1}{x_0}] \to k[t]_{f_0}$ esibisco un primo che non è contrazione di nessun primo. Sia $p = (b\frac{x_1}{x_0} - a)$ il primo in $k[\frac{x_1}{x_0}]$ se fosse la contrazione di un primo q allora $p^e = q^{ce} \subseteq q$ ma $p^e = (b\frac{f_1}{f_0} - a) = (\frac{1}{f_0}) = (1) \in k[t]_{f_0}$ quindi $(f_0 : f_1)$ non è suriettiva.

Viceversa se non è suriettiva esiste $p \in \mathbb{P}^1_k$ che non è nell'immagine e supponiamo $p \in \mathbb{P}^1_{x_0}$ (l'altro caso è analogo). Guardando la mappa $k[\frac{x_1}{x_0}] \to k[t]_{f_0}$ significa che il primo p non è il contratto di nessun primo (in particolare $p \neq (0)$ perché è la contrazione di (0)). Essendo $k[x]$ di dimensione uno p^e non può essere contenuto in nessun primo altrimenti si avrebbe una catena di primi $m \supset p \supset 0$ quindi $1 \in p^e$. Sia $p = (g)$ con g polinomio irriducibile in $k[x]$, si ha che $g(\frac{f_1}{f_0})$ è invertibile in $k[t]_{f_0}$. Se f_0 è costante la tesi è banalmente vera, altrimenti il polinomio $\tilde{g}(f_0, f_1) = g(\frac{f_1}{f_0})f_0^{\deg g} \in k[t]$ è costante perché non è potenza di f_0 in quanto $(f_0, f_1) = 1$.

Il polinomio $\tilde{g}$ è omogeneo per costruzione e irriducibile perché lo era g, voglio mostrare che ha grado uno e così avrei concluso. Sia k' il campo di spezzamente di g su k, $g(\frac{f_1}{f_0})$ è invertibile in $k'[t]_{f_0}$ quindi ogni suo fattore irriducibile è invertibile in $k'[t]_{f_0}$ e per lo stesso ragionamento di prima costruisco $\tilde{g} \in k'[t]$ omogeneo di grado uno tale che $\tilde{g}(f_0, f_1)$ è costante. E' facile verificare che i coefficienti di $\tilde{g}$ sono in k perché lo sono quelli di f_0 e f_1, quindi ho trovato il polinomio di primo grado che valutato in f_0, f_1 dà il polinomio 1. □

I primi omogenei non contenenti (x_0, x_1) di $R[x_0, x_1]$ sono principali e di tre tipi; (0), $(ax_0 + bx_1)$ e $(ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2)$. Sia p uno di questi primi e q tale che $f(q) = p$ allora sia $\varphi : k[x_0, x_1] \to k[t]$ che manda $x_0 \mapsto t$ e $x_1 \mapsto t^2 + 1$; tale mappa è surietiva e il nucleo è $(x_0^2 - x_1 + 1)$ il cui omogenizzato è (0). La condizione $f(q) = p$ si traduce con $q^c = p$ e ciò vale se e solo se $q \supseteq p^e$ (se $p \neq 0$ altrimenti $p = q = (0)$). Perciò topologicamente la fibra è l'insieme dei primi q associati a p^e e il fascio associato al punto della fibra è $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,q} / \varphi_q(m_p) = (\mathbb{R}[t]/p(t, t^2 + 1))_q$ e osservando che la fibra è discreta si ricostruisce completamente la struttura di schema. Considero i vari casi.

- $p = (0)$ l'unico primo associato è (0) e la fibra è $\operatorname{Spec} \mathbb{R}[t]_{(0)} = \operatorname{Spec} \mathbb{R}(t)$.

- $p = (ax_0 + bx_1)$ si ottiene che $p^e = (bt^2 + at + b)$ e il discriminante del polinomio di secondo grado è $a^2 - 4b^2$.

  Se $|a| = 2|b|$ si ottiene che l'unico primo è $(t \pm 1)$ (a seconda se $a = \pm 2b$) e la fibra è $\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x]/(x^2)$.

  Se $|a| < 2|b|$ esiste un unico primo $q = p^e$ e lo schema è $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$.

  Se $|a| > 2|b|$ l'ideale p^e è prodotto di due primi i cui generatori sono polinomi di primo grado e lo spettro è $\operatorname{Spec} \mathbb{R} \sqcup \operatorname{Spec} \mathbb{R}$.

- $p = (ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_1^2)$ e la sua estensione è $(ct^4 + bt^3 + (a+2c)t^2 + bt + c)$. Poichè p è irriducibile il polinomio di quarto grado g non ha radici in $\mathbb{R}$ e quindi si spezza come prodotto di due polinomi irriducibili di secondo grado. Resta da capire se è il quadrato di un irriducibile o prodotto di due primi distinti. A meno di costanti moltiplicative suppongo $c = 1$ e quindi potrebbe essere solo il quadrato di $t^2 + \lambda t \pm 1$, poichè i termini di primo e terzo grado di g sono uguali allora il candidato polinomio è $t^2 + \lambda t + 1$. Il suo quadrato è $t^4 + 2\lambda t^3 + (\lambda^2 + 2)t^2 + \lambda t + 1$ e quindi potrebbe essere un quadrato solo nel caso $4a = 4\lambda^2 = b^2$ ma il polinomio p di partenza non sarebbe irriducibile.

  I due primi sono sempre distinti quindi lo spettro è $\operatorname{Spec} \mathbb{C} \sqcup \operatorname{Spec} \mathbb{C}$.

Un morfismo di schemi è detto *dominante* se l'immagine è densa nel codominio.

Esercizio 9

Testo

Sia $f : X \to Y$ un morfismo di schemi integrali. Mostrare che le seguenti sono equivalenti.

(a) Il morfismo f è dominante.

(b) L'omomorfismo di fasci $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ è iniettivo.

(c) Il morfismo f porta il punto generico di X nel punto generico di Y.

Soluzione

- $a \Rightarrow b$: il morfismo di fasci si fattorizza sul nucleo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_Y \arrow[rr, "f^\#"] \arrow[dr] & & \mathcal{O}_X \\ & \mathcal{O}_Y/\ker f^\# \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \\ & \mathcal{V}_Y(\ker f^\#) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

  $\mathcal{V}_Y(\ker f^\#)$ è sottoschema chiuso di Y contenente $\overline{\operatorname{Im} f}$: per ipotesi f è dominante e quindi $\mathcal{V}_Y(\ker f^\#) = Y$ topologicamente. Per ogni aperto affine U vale che $(0) \supseteq \ker f^\#(U)$ perché (0) è primo in $\mathcal{O}_Y(U)$ e per la proprietà di fascio si ottiene che $\ker f^\# = 0$ e $f^\#$ è iniettiva.

- $b \Rightarrow c$: sia U un aperto affine di Y osservo che il punto generico $\xi \in U$ e che il punto generico η di X appartiene a $f^{-1}(U)$. Per iniettività di $f^\# : \mathcal{O}_Y(U) \to f_* \mathcal{O}_X(U)$ si ha che $(f^\#)^{-1}(0) = 0$ e quindi $f(\eta) = \xi$.

- $c \Rightarrow a$: vale che $\overline{\operatorname{Im} f} \supseteq \overline{f(\eta)} = \overline{\xi} = Y$ quindi f è dominante.

Esercizio 10

Testo

Sia $f : X \to Y$ un morfismo di schemi suriettivo, tale che Y e tutte le fibre di f siano connesse.

(a) Provare che se f è propria, allora X è connesso.

(b) Fornire un esempio in cui X non è connesso.

Rimane vero (a) se sostituiamo dappertutto connesso con irriducibile?

Soluzione

(a) Se f è propria allora è universalmente chiusa e in particolare chiusa. Siano C_1 e C_2 due chiusi disgiunti la cui unione è tutto X. Per ogni punto $y \in Y$ considero $C_i \cup f^{-1}(y)$ che sono due chiusi disgiunti la cui unione è $f^{-1}(y)$ per connessione si ha che uno dei due è vuoto e l'altro è tutta la fibra di y. Considero i due insiemi $W_i = \{y \in Y \mid$

$f^{-1}(y) \subseteq C_i\}$, essi sono disgiunti e la loro unione è Y (f è suriettiva). Osservo che $W_i \supseteq f(C_i)$ e poiché $f(C_1) \cup f(C_2) = Y$ allora si ha l'uguaglianza $W_i = f(C_i)$. Uso il fatto che f è chiusa e la connessione di Y per concludere che uno dei due W_i è vuoto, di conseguenza il corrispondente C_i è vuoto. In conclusione X non può essere unione disgiunta di due chiusi propri e quindi è connesso.

(b) Sia $X = \operatorname{Spec} \mathbb{K}[x,y]/(x^2y - x)$ e $Y = \operatorname{Spec} \mathbb{K}[x]$ e considero f la proiezione indotta dal morfismo di anelli $\varphi : \mathbb{K}[x] \hookrightarrow \mathbb{K}[x,y]/(x^2y - x)$. Sia Y che le fibre sono connesse, poiché le fibre sono omeomerfe ad un punto o ad $\mathbb{A}^1_{\mathbb{K}}$. Inoltre X non è connesso perché l'anello si spezza come prodotto $\mathbb{K}[x,y]/(xy-1) \times \mathbb{K}[x,y]/(x)$ e si usa il risultato dell'esercizio due.

(a.2) Supponendo f affine o X affine si dimostra che X è irriducibile:

Poiché irriducibile implica connesso allora utilizzando il punto (a) deduco che X è connesso. Essere propri e surgettivi è una condizione locale sul codominio e se Y è irriducibile ogni suo aperto è irriducibile. Inoltre uno spazio connesso è irriducibile se e solo se esiste un ricoprimento aperto di irriducibili e applico questo fatto a X. Perciò mi basta considerare solo il caso di Y aperto affine e $X = f^{-1}(Y)$ e di conseguenza X è affine.

Lo schema Y è irriducibile quindi l'anello delle funzioni regolari $B = \mathcal{O}_Y(Y)$ ha un unico primo minimale e lo schema X è irriducibile se e solo se $A = \mathcal{O}_X(X)$ ha unico primo minimale. Essendo f propria e affine per un teorema visto a lezione è finita; in particolare l'estensione $B \hookrightarrow A$ è intera quindi esistono finiti primi di A che si contraggono al primo minimale di B. La fibra del punto generico è quindi discreta e conessa cioé consiste in un solo punto, ciò implica che A ha un unico primo minimale. Di conseguenza $\operatorname{Spec} A$ ha un punto generico ed è irriducibile.

Nel caso generale non vale l'implicazione e mostro un controesempio. Sia $X = \mathcal{V}_{\mathbb{P}^2}(T_1T_2) \simeq \mathbb{P}^1 \sqcup_p \mathbb{P}^1$ e $Y = \mathbb{P}^1$ con la mappa f che manda una retta proiettiva bigettivamente in Y e l'altra retta in un unico punto (l'immagine di $p = (T_1, T_2)$ tramite la bigezione). La mappa f è propria [necessita dimostrazione]. Le fibre sono o un singolo punto o omeomorfe a $\mathbb{P}^1$ e quindi irriducibili e anche Y è irriducibile per lo stesso motivo. Lo spazio X non è irriducibile perché unione di due rette distinte di $\mathbb{P}^2$.

Esercizio 11

Testo

Sia X uno schema G che agisce su X (ossia, abbiamo un omomorfismo da G nel gruppo degli automorfismi di X nella categoria degli schemi). Lo *schema quoziente* è definito come un morfismo G-invariante $\pi : X \to X/G$, tale che ogni morfismo G-invariante $X \to Y$ si fattorizza unicamente attraverso X/G.

(a) Poniamo che $X = \operatorname{Spec} A$ e G sia finito. Allora G è un gruppo di automorfismi di A nella categoria degli anelli. Mostrare che lo schema quoziente X/G esiste, coincide con il quoziente X/G nella categoria degli spazi localmente anellati, ed è isomorfo a $\operatorname{Spec} A^G$, dove A^G è il sottoanello degli invarianti in A.

Inoltre, se U è un sottoschema aperto e invariante di $\operatorname{Spec} A$, stabile sotto l'azione di G, allora lo schema quoziente esiste, ed è isomorfo al sottoschema aperto $\pi(U) \subseteq X/G$.

(b) Assumiamo che G sia ancora finito, e che ogni $x \in X$ abbia un intorno affine stabile per G. Provare che esiste $\pi : X \to X/G$.

(c) Inoltre, assumiamo che X sia localmente di tipo finito su un anello R, e che G sia un gruppo finito di automorfismi di X come R-schema che soddisfi la condizione sopra. Provare che $X \to X/G$ è finito.

(d) Supponiamo che k sia un campo di caratteristica 0, $X = \mathbb{A}^1_k \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Spec} k[t]$ e $G = \mathbb{Z}$. Assumiamo che G agisca su $k[t]$ attraverso la regola $n : f(t) \mapsto f(t+n)$, se $n \in \mathbb{Z}$. Mostrare che X/G esiste nella categoria degli schemi, ed è uguale a $\operatorname{Spec} k$. Mostrare che questo non coincide con il quoziente nella categoria degli spazi localmente anellati.

Soluzione

(a) Mostro che $\operatorname{Spec} A^G$ è lo schema quoziente: Dato uno schema Y e un omomorfismo di schemi $f : X \to Y$ G-invariante il corrispondente omomorfismo di fasci $\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ è G-invariante e quindi si fattorizza attraverso il fascio $\mathcal{O}_X^G$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_Y \arrow[rr, "f^\#"] \arrow[dr] & & \mathcal{O}_X \arrow[r] & \mathcal{O}_X \\ & \mathcal{O}_X^G \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Essendo $\mathcal{O}_X^G$ isomorfo a A^G si ottiene che il morfismo f si fattorizza con $\operatorname{Spec} A^G$ nel seguente modo.

$$\operatorname{Spec} A \longrightarrow \operatorname{Spec} A^G \to Y$$

Poiché $\operatorname{Spec} A^G$ soddisfa la proprietà universale è uno schema quoziente di $\operatorname{Spec} A$ tramite l'azione di G.

Chiamo Y il quoziente come spazi localmente anellati e Z il quoziente come schemi. Essendo gli schemi una sottocategoria degli spazi localmente anellati si ha una unica mappa da $g : Y \to Z$ che fattorizza la proiezione da X in Z.

$$X \longrightarrow Y \xrightarrow{g} Z$$

Mostro che g è un omeomorfismo e poiché $g^\#$ è l'identità di $\mathcal{O}_X^G$ ottengo che g è un isomorfismotra spazi localmente anellati e di conseguenza Y è uno schema isomorfo a Z.

Sappiamo che g è continua e suriettiva perché lo è la proiezione da X in Z. Inoltre è aperta perchè la proiezione da X in Y è continua e quella da X in Z è aperta. Verifico che sia iniettiva mostrando che per ogni $x \in X$ la cardinalità della controimmagine di $\bar{x}$ è finita e uguale alla cardinalità della controimmagine di $g(\bar{x})$. Infatti vale:

$$\left|\pi^{-1}(\pi(p))\right| = \#\{g^\# p \mid g \in G\} = \#\{gx \mid g \in G\}$$

dove identifico il punto x con il primo $p \in A$ e π è la proiezione da X in Z, inoltre tutte le quantità nell'equazione sono finite perché minori di $|G|$. Il membro a destra è proprio la cardinalità della controimmagine di $\bar{x}$ e quindi la mappa è iniettiva.

Infine dato U aperto G-invariante sappiamo che esiste il quoziente come spazi localmente anellati ed è isomorfo alla proiezione di U su Y. Essendo in questo caso Y uno schema allora anche $\pi(U)$ è uno schema e quindi soddisfa le condizioni di quoziente come schemi. Si conclude che il quoziente esiste ed è isomorfo a $\pi(U)$.

(b) Sia X/G il quoziente come spazi localmente anellati, voglio mostrare che è uno schema e quindi che è il quoziente come schemi.

Per mostrarlo trovo per ogni punto $\bar{x} \in X/G$ un intorno affine: sia U l'intorno affine G invariante, per il punto precedente U/G è uno schema affine e coincide con il quoziente come spazi localmente anellati. In particolare il quoziente U/G è incluso in X/G come spazi localmente anellati. Al variare di $\bar{x}$ ottengo un ricoprimento aperto affine di X/G che quindi è uno schema e coincide con il quoziente come schemi.

(c) Per ipotesi esiste un ricoprimento $\{U_i\}_{i\in I}$ di aperti affini G-invarianti e per suriettività di π ottengo un ricoprimento affine (per il punto a) $\{\pi(U_i)\}_{i\in I}$ di X/G. Poichè essere finito è una proprietà locale sul codominio mi basta dimostrare il caso in cui X è affine.

Sia $A = \mathcal{O}_X(X)$ e per quanto dimostrato prima $X/G = \operatorname{Spec} A^G$ e voglio dimostrare che $A^G \hookrightarrow A$ è estensione intera e finitamente generata quindi finita. E' finitamente generata perché lo è su R; dimostro che è intera. Ogni elemnto $a \in A$ è radice del polinomio $\prod_{g\in G}(x - ga)$ i cui coefficienti sono in A^G, il coefficiente direttivo è uno e a è una radice, ciò implica che a è intero su A^G e quindi l'estensione è intera.

(d) Supponiamo di avere una mappa $f : \mathbb{A}^1_k \to X$ che sia G-invariante questa si restringe ad ogni aperto affine $U = \operatorname{Spec} A$ e corrisponde a un morfismo di anelli G-invariante:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f^\#"] \arrow[dr] & & k[t] \\ & k[t]^G \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

I polinomi fissati da G sono solo le costanti quindi $k[t]^G = k$ e si ottiene che la mappa f si fattorizza su $\operatorname{Spec} k$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^1_k \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & X \\ & \operatorname{Spec} k \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Lo schema $\operatorname{Spec} k$ ha la proprietà universale del quoziente quindi è isomorfo al quoziente (come schemi). Dimostro che non è isomorfo al quoziente come spazi localmente anellati perché esso ha più di un punto. Se esiste $\alpha \in k \setminus \mathbb{Z}$ allora i punti corrispondenti ai primi $(t-\alpha)$ e (t) sono diversi nel quoziente di spazi topologici. Altrimenti k non è algebricamente chiuso e quindi esiste un polinomio irriducibile f di grado almeno due e i due primi (f) e (t) sono distinti nel quoziente topologico.

Esercizio 12

Testo

Sia X uno schema localmente di tipo finito su $\operatorname{Spec} k$, e $x \in X$. Mostrare che x è chiuso se e solo se $k(x)$ è un'estensione finita di k.

Soluzione

Un insieme x è chiuso se e solo se è localmente chiuso, quindi a meno di passare a un ricoprimento di aperti affini posso supporre X affine (uguale allo spettro della k-algebra A). Il punto $p \in \operatorname{Spec} A$ è chiuso se e solo se p è un massimale se e solo se A/p è un campo. Poiché X è localmente di tipo finito allora A è finitamente generata come algebra su k, di conseguenza anche A/p è finitamente generata.

Resta da dimostrare che $k(p) = (A/p)_0$ è estensione finita di k se e solo se A/p è un campo. Se A/p è un campo allora è estensione finitamente generata e algebrica (altrimenti contiene un elemento x trascendente e $k(x)$ non è finitamente generata) quindi finita. Viceversa un'estensione finita di campi $k \subseteq (A/p)_0$ è algebrica e finitamente generata di conseguenza A/p è estensione intera di k. Si conclude ricordandosi che un dominio intero su un campo è un campo.